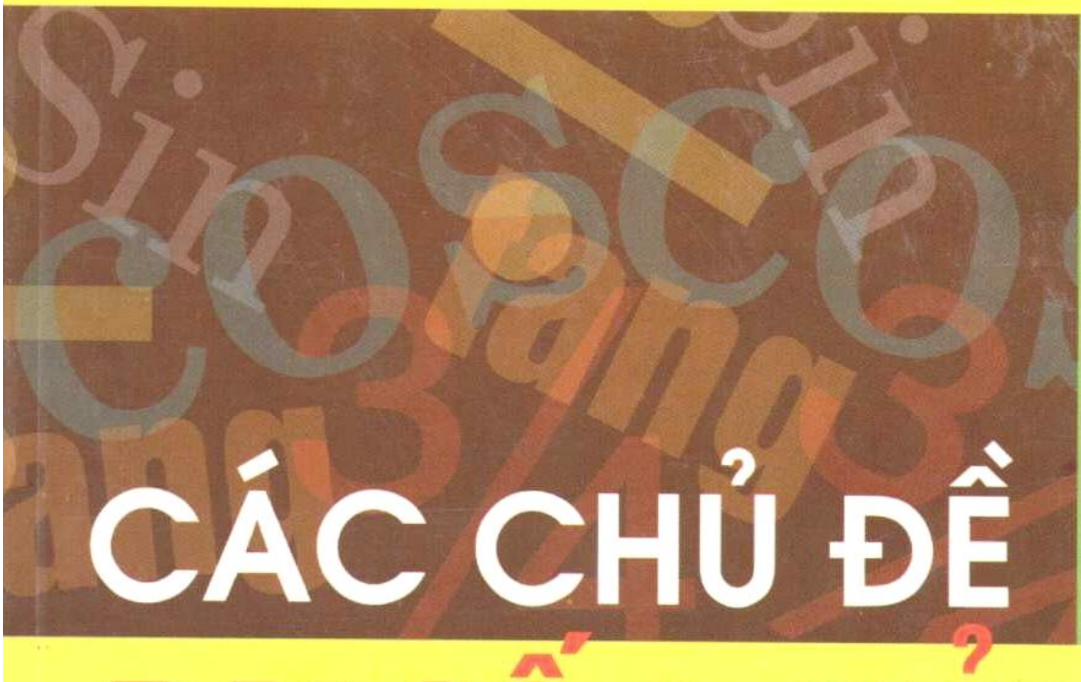
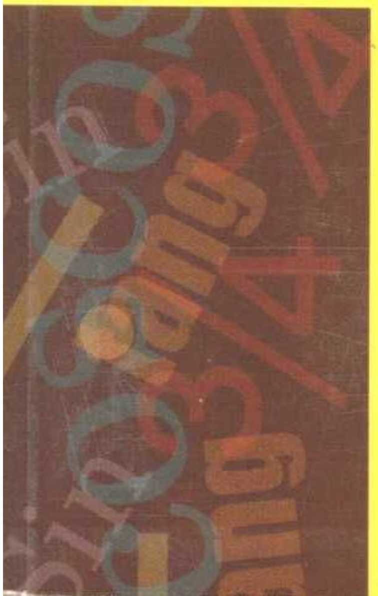
ThS. VÕ GIANG GIAI



CÁC CHỦ ĐỀ
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11

(TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM)

- Giới thiệu đề thi Olympic 30 - 4
  và đề toán trên tạp chí "Toán học và tuổi trẻ"
- Biên soạn theo chương trình SGK mới



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. VÕ GIANG GIAI

CÁC CHỦ ĐỀ
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11

(Tự luận & trắc nghiệm)

- Giới thiệu đề thi Olympic 30 – 4 và đề toán trên tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ"
- Biên soạn theo chương trình SGK mới

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Cuốn sách "***Các chủ đề Đại số và Giải tích 11***" được biên soạn dựa theo sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 xuất bản năm 2007 của Bộ Giáo dục và Đào tạo, bao gồm 5 chương, mỗi chương được trình bày theo cấu trúc:

+ *Tóm tắt lý thuyết*
+ *Bài tập cơ bản*
+ *Bài tập cơ bản đề nghị*
+ *Bài tập nâng cao*
+ *Bài tập nâng cao đề nghị*
+ *Bài tập trắc nghiệm ôn tập cuối chương.*

Sách được biên soạn công phu, hệ thống chi tiết và đầy đủ các kiến thức cơ bản. Tất cả các bài tập đều lượt trích từ các đề thi Đại học, đề thi Olympic 30 – 4 và đề toán trên tạp chí "***Toán học và Tuổi trẻ***", do đó sách rất phù hợp cho các học sinh tự học ở nhà, ôn luyện thi đại học và thi học sinh giỏi.

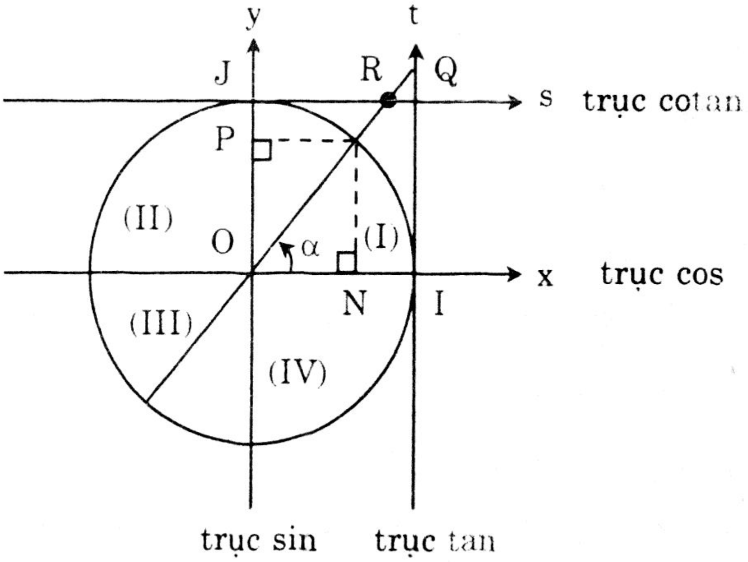
Tác giả chân thành cảm ơn trước sự góp ý của các em học sinh và đồng nghiệp để lần tái bản sau được tốt hơn.

Tác giả

Chương I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT


y
t
J
R
Q
s
trục cotan
P
(II)
O
α
(I)
x
trục cos
N
I
(III)
(IV)
trục sin
trục tan

1. Định nghĩa các hàm số lượng giác

- $\sin\alpha = \overline{OP} = y$
- $\cos\alpha = \overline{ON} = x$
- $\tan\alpha = \overline{IQ} = \dfrac{y}{x}$ (với $x \neq 0$)
- $\text{cotan}\,\alpha = \overline{JR} = \dfrac{x}{y}$ (với $y \neq 0$)

2. Dấu các hàm số lượng giác

Cung phần tư / Hàm số lượng giác	(I)	(II)	(III)	(IV)
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\text{cotan}\,\alpha$	+	–	+	–

3. *Giá trị các hàm số lượng giác của một số góc (cung) đặc biệt*

Góc (cung) α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Hàm số lượng giác	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	270^0	360^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	‖	0
cotanα	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	‖	0	‖

4. *Các hàm số lượng giác của một góc (cung) liên quan đặt biệt*

Góc (cung) α	Đối	Phụ	Bù	Hơn $\frac{\pi}{2}$	Hơn π
Hàm số lượng giác	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$
sinα	–sinα	cosα	sinα	cosα	–sinα
cosα	cosα	sinα	–cosα	–sinα	–cosα
tanα	–tanα	cotanα	–tanα	–cotanα	tanα
cotanα	–cotanα	tanα	–cotanα	–tanα	cotanα

Chú ý:

- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\text{cotan}(\alpha + k\pi) = \text{cotan}\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.

5. *Các hệ thức cơ bản*

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\text{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

- $\tan\alpha.\mathrm{cotan}\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \mathrm{cotan}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6. Các công thức cộng

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha.\cos\beta \pm \sin\beta.\cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha.\sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha.\tan\beta}$
- $\mathrm{cotan}(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$
- $\mathrm{cotan}(\alpha + \beta) = -\dfrac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$

7. Các công thức nhân đôi

- $\sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$
- $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\tan2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- $\mathrm{cotan}2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

8. Các công thức nhân ba

- $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\tan3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$
- $\mathrm{cotan}3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

9. Các công thức hạ bậc

- $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos2\alpha}{2}$
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos2\alpha}{2}$

- $\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
- $\cot\text{an}^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

10. Các công thức tính theo $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

- $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$
- $\text{cotan}\,\alpha = \dfrac{1 - t^2}{2t}$

11. Các công thức biến tổng thành tích

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}.\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}.\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}.\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}.\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$
- $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$
- $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$
- $\text{cotan}\,\alpha + \text{cotan}\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$
- $\text{cotan}\,\alpha - \text{cotan}\,\beta = -\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

12. Các công thức biến tích thành tổng

- $\sin\alpha.\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- $\cos\alpha.\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

- $\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- $\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

13. Các phương trình lượng giác cơ bản

- $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = (-1)^k\alpha + k\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

- $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\,\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\text{cotan}x = \text{cotan}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Đặc biệt

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\text{cotan}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow \text{cotan}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow \text{cotan}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

14. Các phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác

- $a\sin^2x + b\sin x + c = 0\ (a \neq 0) \xrightarrow{\text{cách giải}}$ Đặt $t = \sin x \in [-1, 1]$

- $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0\ (a \neq 0) \xrightarrow{\text{cách giải}}$ Đặt $t = \cos x \in [-1, 1]$
- $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0\ (a \neq 0) \xrightarrow{\text{cách giải}}$ Đặt $t = \tan x \in \mathbb{R}$
- $a\text{cotan}^2 x + b\text{cotan}x + c = 0\ (a \neq 0) \xrightarrow{\text{cách giải}}$ Đặt $t = \text{cotan}x \in \mathbb{R}$

15. *Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx*

$$a\cos x + b\sin x = c \quad (a^2 + b^2 > 0) \qquad (1)$$

Cách giải 1:

Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (2), với } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm là: $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

Với điều kiện trên, ta đặt: $\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\psi$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) trở thành: $\cos(x - \varphi) = \cos\psi$.

Cách giải 2: Xét hai trường hợp:

- $x = \pi + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ có phải là nghiệm của phương trình này hay không?
- Xét $x \neq \pi + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Khi đó đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$ thì: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow a\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} + b\dfrac{2t}{1 + t^2} = c$

$$\Leftrightarrow (a + c)t^2 - 2bt + (c - a) = 0.$$

16. *Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx*

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0$$

Cách giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Khi đó: $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Nên phương trình đã cho trở thành: $at + b\dfrac{t^2 - 1}{2} + c = 0$...

Chú ý: Đối với phương trình: $a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0$, ta đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = -\dfrac{t^2 - 1}{2}$ ...

17 *Phương trình đẳng cấp đối với sinx và cosx*

$$a\sin^2x + b\sin x.\cos x + c.\cos^2x + d = 0$$

Cách giải 1: Xét hai trường hợp:

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ có phải là nghiệm của phương trình hay không?
- Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2x$, ta được:

$$a\tan^2x + b\tan x + c + d(1 + \tan^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + d)t^2 + bt + c + d = 0, \text{ với } t = \tan x.$$

Cách giải 2:

Theo công thức hạ bậc, ta có:

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}b\sin 2x + \frac{1}{2}c(1 + \cos 2x) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow b\sin 2x + (c - a)\cos 2x = -(2d + a + c)...$$

18 *Một số phương trình lượng giác không mẫu mực*

- *Dạng 1:*

$$A^2(x) + B^2(x) + ... + C^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ C(x) = 0 \end{cases}$$

- *Dạng 2:*

$$\begin{cases} A(x) \geq M \\ B(x) \leq M \\ A(x) = B(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = M \\ B(x) = M \end{cases}$$

- *Dạng 3:*

$$\begin{cases} A(x) \leq M \\ B(x) \leq N \\ A(x) + B(x) = M + N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = M \\ B(x) = N \end{cases}$$

- *Dạng 4:*

$$A(x).B(x).... C(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ .... \\ C(x) = 0 \end{array}\right.$$

19. Các công thức về tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

- $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$
- $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \quad \left(S = -\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

- $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$$

- $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$\left[\begin{array}{l} \alpha < x_1 < \beta < x_2 \\ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) < 0$$

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

- $f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \\ f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

20. Các bất đẳng thức thông dụng

- Bất đẳng thức Cauchy:

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ $(2 \le n \in \mathbb{Z})$ thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

- Bất đẳng thức Bunhiacopski (BCS):

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ $(2 \le n \in \mathbb{Z})$ thì

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ .... \\ a_n = k.b_n \end{cases}$

- Bất đẳng thức Bernoulli:

Nếu $a \ge -1,\ n \ge 1,\ n \in Q$ thì $(1 + a)^n \ge 1 + na$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

B/ BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

B1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

$$A = \sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x.$$

Giải

Ta có: $\begin{cases} \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \\ \cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}\sin3x(3\sin x - \sin3x) + \frac{1}{4}\cos3x(3\cos x + \cos3x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos^2 3x - \sin^2 3x) + \frac{3}{4}(\sin x.\sin3x + \cos x.\cos3x)$$

$$= \frac{1}{4}\cos6x + \frac{3}{4}\cos2x$$

$$= \frac{1}{4}(\cos6x + 3\cos2x) = \frac{1}{4}(4\cos^3 2x) = \cos^3 2x.$$

Bài 2. Rút gọn (không còn dấu căn) biểu thức:

$$B = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos4\alpha}}, \ \left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Giải

Ta có: $B = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos4\alpha)}} = \sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2\alpha}}$

$$= \sqrt{2(1 + |\cos2\alpha|)} = \begin{cases} \sqrt{2(1 + \cos2\alpha)}, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4} \\ \sqrt{2(1 - \cos2\alpha)}, & \dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{4\cos^2\alpha}, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4} \\ \sqrt{4\sin^2\alpha}, & \dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} 2\cos\alpha, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\sin\alpha, & \dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy: $B = \begin{cases} 2\cos\alpha, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4} \\ 2\sin\alpha, & \dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Bài 3. Tính hàm số lượng giác của các góc:

a) 210^0 b) 495^0 c) $\dfrac{29\pi}{6}$ d) $-\dfrac{5\pi}{2}$

Giải

a) Ta có: $210^0 = 30^0 + 180^0$

Do đó: $\sin210^0 = \sin(30^0 + 180^0) = -\sin30^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\cos210^0 = \cos(30^0 + 180^0) = -\cos30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 210^0 = \frac{\sin 210^0}{\cos 210^0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotan} 210^0 = \frac{1}{\tan 210^0} = \sqrt{3}$$

b) Ta có: $495^0 = 135^0 + 360^0$

Do đó: $\sin 495^0 = \sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 495^0 = \cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 495^0 = \frac{\sin 495^0}{\cos 495^0} = -1$$

$$\text{cotan} 495^0 = \frac{1}{\tan 495^0} = -1$$

c) Ta có: $\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

Do đó: $\sin\frac{29\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\cos\frac{29\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{29\pi}{6} = \frac{\sin\frac{29\pi}{6}}{\cos\frac{29\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotan}\frac{29\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

d) Ta có: $-\frac{5\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$

Do đó: $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{0} \text{ (không xác định)}$$

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{0}{(-1)} = 0.$$

Bài 4.

a) Cho $\sin a = \frac{5}{13}\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính cosa, cotana

b) Cho $\cos a = \frac{4}{5}$ $(270^0 < a < 360^0)$. Tính sina, tana.

Giải

a) $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{12}{13}\left(\text{vì } 0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{5}{12}$$

b) $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$$\Rightarrow \sin a = -\frac{3}{5} \text{ (vì } 270^0 < a < 360^0)$$

$$\Rightarrow \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{4}{3}$$

Bài 5. Cho $\cos\alpha = -\frac{2007}{2008}$

Tính $P = \frac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1}$

Giải

Ta có: $P = \frac{(1 + \cos 2\alpha) + (\cos 3\alpha + \cos\alpha)}{2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1}$

$$= \frac{2\cos^2\alpha + 2\cos 2\alpha.\cos\alpha}{(2\cos^2\alpha - 1) + \cos\alpha}$$

$$= \frac{2\cos\alpha(\cos 2\alpha + \cos\alpha)}{\cos 2\alpha + \cos\alpha} = 2\cos\alpha = -\frac{2007}{1004}$$

Bài 6. Rút gọn biểu thức:

$$Q = \cos x\sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} \quad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

Giải

Ta có: $Q = \cos x\sqrt{\dfrac{(1+\cos x)+(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}}$

$$= \cos x\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} = \cos x.\frac{\sqrt{2}}{|\sin x|}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos x}{\sin x} \quad \left(\text{vì } \frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\text{cotan}x.$$

Bài 7. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x.

a) $A = \cos^2x + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$

b) $B = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{7} - x\right) + \cos^2x - 2\cos\dfrac{\pi}{7}\cos x.\cos\left(\dfrac{\pi}{7} - x\right)$

c) $C = 2(\sin^4x + \cos^4x + \sin^2x.\cos^2x)^2 - (\sin^8x + \cos^8x)$

Giải

a) Ta có

- $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3}\cos x - \sin\dfrac{2\pi}{3}.\sin x$

$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

- $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3}.\cos x + \sin\dfrac{2\pi}{3}.\sin x$

$$= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$$

$$\Rightarrow A = \cos^2x + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$$

$$= \cos^2x + \frac{1}{2}\cos^2x + \frac{3}{2}\sin^2x = \frac{3}{2}(\sin^2x + \cos^2x) = \frac{3}{2}$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1964

b) Ta có:

- $\cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = \cos\frac{\pi}{7}.\cos x + \sin\frac{\pi}{7}.\sin x$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = \cos^2\frac{\pi}{7}.\cos^2 x$$

$$+ \sin^2\frac{\pi}{7}.\sin^2 x + 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\sin x.\cos x$$

- $2\cos\frac{\pi}{7}.\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = 2\cos\frac{\pi}{7}.\cos x\left(\cos\frac{\pi}{7}.\cos x + \sin\frac{\pi}{7}.\sin x\right)$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{7}.\cos^2 x + 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\sin x.\cos x$$

$$\Rightarrow B = \cos^2 x + \sin^2\frac{\pi}{7}.\sin^2 x - \cos^2\frac{\pi}{7}.\cos^2 x$$

$$= \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{7}\right)\cos^2 x + \sin^2\frac{\pi}{7}.\sin^2 x$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{7}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2\frac{\pi}{7}$$

c) Đặt $\begin{cases} u = \sin^2 x \\ v = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le u, v \le 1 \\ u + v = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow C = 2(u^2 + v^2 + uv)^2 - (u^4 + v^4)$$

$$= 2[(u + v)^2 - uv]^2 - [(u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2]$$

$$= 2(1 - uv)^2 - \{[(u + v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2\}$$

$$= 2(1 - uv)^2 - [(1 - 2uv)^2 - 2u^2v^2]$$

$$= 2(1 - uv)^2 - (1 - 4uv + 2u^2v^2)$$

$$= (2 - 4uv + 2u^2v^2) - (1 - 4uv + 2u^2v^2) = 1$$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \dfrac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}$

b) $B = \dfrac{\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x}{\sin 3x + 2\sin 4x + \sin 5x}$

Giải

a) Ta có:

- $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = (\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x)$

$$= 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$= 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$$

- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = (\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x)$

$$= 2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$= 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$. Do đó $A = \cot\text{an}\frac{5x}{2}$

b) Ta có:

- $\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x$
  $= (\sin 4x + \sin 2x) + 2\sin 3x$
  $= 2\sin 3x.\cos x + 2\sin 3x$
  $= 2\sin 3x(1 + \cos x)$
- $\sin 3x + 2\sin 4x + \sin 5x$
  $= (\sin 5x + \sin 3x) + 2\sin 4x$
  $= 2\sin 4x.\cos x + 2\sin 4x$
  $= 2\sin 4x\ (1 + \cos x)$

Do đó: $B = \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

Bài 9. Tính các tổng sau:

a) $P = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$

b) $Q = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$

Giải

a) Ta có:

$$2P\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$= \sin\pi - \sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$$

$\Rightarrow P = -\frac{1}{2}$ (vì $\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$)

b) $2Q\sin\frac{\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}.\cos\frac{2\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}.\cos\frac{4\pi}{5}$

$+ 2\sin\frac{\pi}{5}.\cos\frac{6\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}.\cos\frac{8\pi}{5}$

$= \left(\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{5}\right) + \left(\sin\frac{7\pi}{5} - \sin\frac{5\pi}{5}\right)$

$+ \left(\sin\frac{9\pi}{5} - \sin\frac{7\pi}{5}\right)$

$= \sin\frac{9\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} = 2\cos\pi.\sin\frac{4\pi}{5}$

$= -2\sin\frac{\pi}{5}$

$\Rightarrow Q = -1$ (vì $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$)

Bài 10. Tính các tổng sau:

a) $A = \tan 9^0 - \tan 27^0 - \tan 63^0 + \tan 81^0$

b) $B = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

Giải

a) Ta có:

$$A = (\tan 9^0 + \tan 81^0) - (\tan 27^0 + \tan 63^0)$$

$$= \frac{\sin 90^0}{\cos 9^0.\cos 81^0} - \frac{\sin 90^0}{\cos 27^0.\cos 63^0}$$

$$= \frac{2}{\cos 90^0 + \cos 72^0} - \frac{2}{\cos 90^0 + \cos 36^0}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\cos 72^0} - \frac{1}{\cos 36^0}\right) = \frac{2(\cos 36^0 - \cos 27^0)}{\cos 27^0.\cos 36^0}$$

$$= \frac{4\sin 54^0.\sin 18^0}{\sin 18^0.\sin 54^0} = 4$$

b) Ta có:

$$2\sin\frac{\pi}{7}B = 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}$$

Do $\sin\frac{\pi}{7} \neq 0$ nên $B = \frac{1}{2}$

Bài 11.

a) Cho $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

- $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$
- $\text{cotan}\alpha + \text{cotan}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

b) Cho $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{16}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\cos\alpha.\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha.\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos 7\alpha.\cos 8\alpha} = \frac{\tan 8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$$

Giải

a) Ta có:

- $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

- $\text{cotan}\alpha + \text{cotan}\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\beta.\cos\alpha + \sin\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta}$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$$

b) Theo kết quả câu a, ta có:

$$+\left|\begin{array}{l} \tan 2\alpha - \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha.\cos 2\alpha} \\ \tan 3\alpha - \tan 2\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha.\cos 3\alpha} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tan 8\alpha - \tan 7\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos 7\alpha.\cos 8\alpha} \end{array}\right.$$

$$\tan 8\alpha - \tan\alpha = \sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos 7\alpha\cos 8\alpha}\right)$$

Vậy $\dfrac{1}{\cos\alpha.\cos 2\alpha} + \dfrac{1}{\cos 2\alpha.\cos 3\alpha} + \ldots + \dfrac{1}{\cos 7\alpha.\cos 8\alpha}$

$$= \frac{\tan 8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$$

Bài 12.

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = a\sin x + b\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ (a, b là các hằng số không đồng thời bằng 0)

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$y = 3\sin^2 x + \sin x.\cos x + \cos^2 x$$

c) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = A\sin^2 x + B\sin x.\cos x + C.\cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$, (A, B, C là các hằng số không đồng thời bằng 0)

Giải

a) Ta có:

$$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi.\sin x + \sin\varphi.\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\varphi)$$

với $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{max} = \sqrt{a^2+b^2} & \left(\text{tại } x = \dfrac{\pi}{2} - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \\ y_{min} = -\sqrt{a^2+b^2} & \left(\text{tại } x = -\dfrac{\pi}{2} - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$$

b) Ta có:

$$y = 2\sin^2 x + \sin x.\cos x + 1$$

$$= 1 - \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x + 2$$

Vậy $\begin{cases} y_{max} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+1} + 2 = 2 + \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y_{min} = -\sqrt{\dfrac{1}{4}+1} + 2 = 2 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

:) Ta có:

$$y = \frac{A}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{B}{2}\sin 2x + \frac{C}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(C - A)\cos 2x + \frac{B}{2}\sin 2x$$

Theo kết quả câu a, ta có:

$$\begin{cases} y_{\max} = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} \\ y_{\min} = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} \end{cases}$$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \cot\text{an}\, x\left(\frac{1 + \sin^2 x}{\cos x} - \cos x\right)$

b) $B = \cos(7\pi + x) - 2\sin\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{2} + x\right)$

c) $C = \tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x$, với $x, y, z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

Giải

a) Ta có:

$$A = \frac{\cos x}{\sin x}.\frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x}.\frac{2\sin^2 x}{\cos x} = 2\sin x$$

b) Ta có:

- $\cos(7\pi + x) = \cos(\pi + x + 3.2\pi) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x + 4.2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

  $= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x.$
- $\sin\left(\frac{19\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + 10.2\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

$\Rightarrow B = -\cos x + 2\cos x + \cos x = 2\cos x.$

c) *Cách 1:*

Ta có:

$$C = \tan x(\tan y + \tan z) + \tan y.\tan z = \tan x.\frac{\sin(y+z)}{\cos y.\cos z} + \tan y.\tan z$$

$$= \tan x.\frac{\cos x}{\text{coxy}.\cos z} + \tan y.\tan z \left(\text{vì } y + z = \frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos y.\cos z} + \tan y.\tan z$$

$$= \frac{\cos(y+z)}{\cos y.\cos z} + \frac{\sin y.\sin z}{\cos y.\cos z} \left(\text{vì } y + z = \frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \frac{\cos y.\cos z}{\cos y.\cos z} = 1 \ (\text{vì } \cos(y+z) = \cos y.\cos z - \sin y.\sin z)$$

Cách 2:

Từ: $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} - z$

$\Rightarrow \tan(x+y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cot z$

$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y} = \frac{1}{\tan z}$

$\Rightarrow \tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x = 1 \Rightarrow C = 1.$

Bài 14. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$, với $\begin{cases} 90^0 < x < 180^0 \\ \cos x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

b) $B = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x}$, biết cotanx = –3

Giải

a) Ta có:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (vì } 90^0 < x < 180^0)$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{cotan}x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{4} - 2\sqrt{2}} = -\frac{7}{9}$$

b) Ta có:

$$B = \frac{\frac{(\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x)}{\sin^2 x}}{\frac{(2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1 + 2\cot x - 2\cot^2 x}{2 - 3\cot x + 4\cot^2 x} = \frac{1 - 6 - 18}{2 + 9 + 36} = \frac{-23}{47}$$

Bài 15. Cho ΔABC không vuông. Chứng minh rằng:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

d) $\text{cotan}A.\text{cotan}B + \text{cotan}B.\text{cotan}C + \text{cotan}C.\text{cotan}A = 1$

e) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C$

f) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A.\cos B.\cos C)$

g) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$

h) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$

i) $\text{cotan}\frac{A}{2} + \text{cotan}\frac{B}{2} + \text{cotan}\frac{C}{2} = \text{cotan}\frac{A}{2}.\text{cotan}\frac{B}{2}.\text{cotan}\frac{C}{2}$

j) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$

k) $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}.\sin\frac{3B}{2}.\sin\frac{3C}{2}$

Giải

a) Ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) \quad \left(\text{vì} \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

b) Ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right] + 1 \quad \left(\text{vì} \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1$$

$$= 1 + 4\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{A}{2}$$

c) Ta có: $A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C$$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

d) Theo câu c ta có: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B} + \frac{1}{\cot C} = \frac{1}{\cot A.\cot B.\cot C}$$

$\Leftrightarrow \text{cotan}A.\text{cotan}B + \text{cotan}B.\text{cotan}C + \text{cotan}C.\text{cotan}A = 1$

e) Ta có:

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2\cos(A + B).\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] - 1$ (vì $\cos(A + B) = -\cos C$)

$= -1 - 4\cos C.\cos B.\cos A$

f) Ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2C)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1 - 4\cos A.\cos B.\cos C) \text{ (Do kết quả câu e)}$$

$$= 2(1 + \cos A.\cos B.\cos C)$$

g) Ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$= 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C \text{ (Do kết quả câu f)}$$

h) Ta có:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \text{cotan}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$$

i) Theo câu h, ta có:

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{C}{2}.\cot\frac{A}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \text{cotan}\frac{A}{2} + \text{cotan}\frac{B}{2} + \text{cotan}\frac{C}{2} = \text{cotan}\frac{A}{2}.\text{cotan}\frac{B}{2}.\text{cotan}\frac{C}{2}$$

j) Ta có:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A + B).\cos(A - B) + 2\sin C.\cos C$$

$$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 4\sin C.\sin B.\sin A.$$

$$\left(\text{vì} \begin{cases} \sin(A + B) = \sin C \\ \cos(A + B) = -\cos C \end{cases}\right)$$

k) Ta có:

$$\cos\frac{3(A+B)}{2} = \cos\frac{3(\pi - C)}{2} = \cos\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\right]$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) = -\sin\frac{3C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 2\cos\frac{3(A+B)}{2}.\cos\frac{3(A-B)}{2} + \cos 3C$$

$$= -2\sin\frac{3C}{2}.\cos\frac{3(A-B)}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3(A-B)}{2} + \sin\frac{3C}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3(A-B)}{2} + \cos\frac{3(A+B)}{2}\right)$$

$$= 1 - 4\sin\frac{3C}{2}.\sin\frac{3B}{2}.\sin\frac{3A}{2}$$

Bài 16.

Cho $\begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \cos^4\alpha = \dfrac{1}{a+1} \end{cases}$

Chứng minh: $\dfrac{\sin^{2008}\alpha}{a^{1003}} + \cos^{2008}\alpha = \dfrac{1}{(a+1)^{1003}}$

Giải

Ta có:

$$(a+1)\left(\frac{\sin^4\alpha}{a} + \cos^4\alpha\right) = 1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^4\alpha + a\cos^4\alpha + \frac{\sin^4\alpha}{a} + \cos^4\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4\alpha}{a} + a\cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\cos^2\alpha\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{a} = \frac{\cos^2\alpha}{1} = t\left(= \frac{1}{a+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^{2008}\alpha}{a^{1003}} + \cos^{2008}\alpha = \frac{1}{a^{1003}}(at)^{1004} + t^{1004}$$

$$= (a + 1)t^{1004} = \frac{1}{(a + 1)^{1003}}$$

Bài 17. Chứng minh rằng:

$$8 + 4\tan\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{32} = \text{cotan}\frac{\pi}{32}$$

Giải

Sử dụng công thức: $\text{cotan}x - \tan x = 2\text{cotan}2x$

Ta có:

$$\text{cotan}\frac{\pi}{32} - \tan\frac{\pi}{32} - 2\tan\frac{\pi}{16} - 4\tan\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\text{cotan}\frac{\pi}{16} - 2\tan\frac{\pi}{16} - 4\tan\frac{\pi}{8} = 2\left(\cot\frac{\pi}{16} - \tan\frac{\pi}{16}\right) - 4\tan\frac{\pi}{8}$$

$$= 4\text{cotan}\frac{\pi}{8} - 4\tan\frac{\pi}{8}$$

$$= 4\left(\cot\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{8}\right) = 8\text{cotan}\frac{\pi}{4} = 8$$

$$\Rightarrow 8 + 4\tan\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{16} + \tan\frac{\pi}{32} = \text{cotan}\frac{\pi}{32}$$

Bài 18. Chứng minh rằng:

a) $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

b) $\cos 36^0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

Giải

a) Ta có: $\cos 54^0 = \sin 36^0$

$\Leftrightarrow \cos(3.18^0) = \sin(2.18^0)$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0 = 2\sin 18^0.\cos 18^0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 18^0 - 3 = 2\sin 18^0$ (vì $\cos 18^0 \in (0, 1)$)

$\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 18^0) - 3 = 2\sin 18^0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^0 + 2.\sin 18^0 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ (vì } \sin 18^0 \in (0, 1))$$

b) Theo câu a: $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\Rightarrow \cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Bài 19. Cho $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma)$

Tính hệ thức liên hệ giữa α, β, γ.

Giải

Ta có: $2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma = 4(1 + \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma)$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 2 - 2\cos^2\gamma$

$= 4 + 2[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].\cos\gamma$

$\Rightarrow (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + 2\cos^2\gamma + 2[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].\cos\gamma = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta).\cos(\alpha - \beta) + \cos^2\gamma + [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)].\cos\gamma = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma] + \cos\gamma[\cos\gamma + \cos(\alpha - \beta)] = 0$

$\Leftrightarrow [\cos(\alpha + \beta) + \cos\gamma][\cos\gamma + \cos(\alpha - \beta)] = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}.\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = \pi + k.2\pi \\ -\alpha + \beta + \gamma = \pi + k.2\pi \\ \alpha - \beta + \gamma = \pi + k.2\pi \\ \alpha + \beta - \gamma = \pi + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 20. Chứng minh đẳng thức:

$$8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 = 1$$

Cách 1: Dùng kết quả bài 18a: $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ để chứng minh VT = 1

Cách 2: Ta có: $8\sin^3 18^0 + 8\sin^2 18^0 = 8\sin^2 18^0(1 + \sin 18^0)$

$$= 8\sin^2 18^0(1 + \cos 72^0) = 16.\sin^2 18^0.\cos^2 36^0$$

$$= \frac{16(\sin 18^0.\cos 18^0.\cos 36^0)^2}{\cos^2 18^0} = \frac{4(\sin 36^0.\cos 36^0)^2}{\cos^2 18^0}$$

$$= \frac{\sin^2 72^0}{\cos^2 18^0} = 1$$

Bài 21. Cho

$$\begin{cases} 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{4} \\ \tan 2\alpha = \cot 2\beta + \cot 2\gamma + \tan 2\alpha.\cot 2\beta.\cot 2\gamma \end{cases}$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa α, β, γ

Giải

Ta có: $\tan 2\alpha = \text{cotan}2\beta + \text{cotan}2\gamma + \tan 2\alpha.\text{cotan}2\beta.\text{cotan}2\gamma$

$$\Leftrightarrow \tan 2\alpha(1 - \text{cotan}2\beta.\text{cotan}2\gamma) = \text{cotan}2\beta + \text{cotan}2\gamma$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\alpha(\tan 2\beta.\tan 2\gamma - 1) = \tan 2\beta + \tan 2\gamma$$

$$\Leftrightarrow -\tan 2\alpha = \frac{\tan 2\beta + \tan 2\gamma}{1 - \tan 2\beta.\tan 2\gamma} = \tan(2\beta + \tan 2\gamma)$$

$$\Leftrightarrow 2\beta + 2\gamma = -2\alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{k\pi}{2}$$

Do: $0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \alpha + \beta + \gamma < \dfrac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 < k < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \ (\text{vì } k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 22. Cho

$$\begin{cases} m\sin(a+b) = \cos(a-b) \\ a \neq b + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1 - m\sin 2a} + \dfrac{1}{1 - m\sin 2b} = \dfrac{2}{1 - m^2}$

Giải

Ta có: $\dfrac{1}{1 - m\sin 2a} + \dfrac{1}{1 - m\sin 2b}$

$$= \frac{2 - m(\sin 2a + \sin 2b)}{1 - m(\sin 2a + \sin 2b) + m^2 \sin 2a \sin 2b}$$

$$= \frac{2[1 - m\sin(a+b)\cos(a-b)]}{1 - 2m\sin(a+b)\cos(a-b) + m^2[\cos^2(a-b) - \cos^2(a+b)]}$$

(vì: $\sin 2a.\sin 2b = \dfrac{1}{2}[\cos(2a - 2b) - \cos(2a + 2b)]$

$$= \frac{1}{2}[(1 + \cos(2a - 2b) - (1 + \cos(2a + 2b))]$$

$$= \cos^2(a - b) - \cos^2(a + b)$$

$$= \frac{2[1 - \cos^2(a-b)]}{1 - 2\cos^2(a-b) + m^2[\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b)]}$$

$$= \frac{2\sin^2(a-b)}{1 - 2\cos^2(a-b) + \cos^2(a-b) - m^2\sin^2(a-b)}$$

$$= \frac{2\sin^2(a-b)}{\sin^2(a-b)[1 - m^2]} = \frac{2}{1 - m^2}$$

B2. Bài tập đề nghị

1. Cho $\cos a + \sin a = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\tan\dfrac{a}{2}$

Đáp số: $\tan\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{7} - 2}{3}$

2. Cho hàm số:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + a(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2\sin^2 2x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Tìm a để f(x) không phụ thuộc vào $x \in \mathbb{R}$

Đáp số: $a = \dfrac{5}{2}$

3. Cho ΔABC không tù thỏa mãn điều kiện:

$$\cos 2A + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C) = 3$$

Tính các góc của ΔABC.

(ĐH và CĐ, khối A, năm 2004)

Hướng dẫn

ΔABC không tù $\Rightarrow \cos\frac{A}{2} \geq \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow 3 - (\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C)$$

$$= 2\sin^2 A - 2\sqrt{2}(\cos A + \cos C) + 2$$

$$= 2\sin^2 A - 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} + 2$$

$$= 2\sin^2 A + 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} + 2$$

$$\geq 2\sin^2 A + 8\left(-\cos\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} + 2$$

$$\geq 2\sin^2 A - 4\sin A.\cos\frac{B-C}{2} + 2$$

$$\geq 2\sin^2 A - 4\sin A + 2 \geq 2(\sin A - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3 - (\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C) \geq 0$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$ (?)

4. Chứng minh rằng:

a) $\cos^3 x.\sin x - \sin^3 x.\cos x = \frac{1}{4}\sin 4x$

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$

c) $\cot\text{an}3x = \cot\text{an}x.\cot\text{an}\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\cot\text{an}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

5. Tính các biểu thức sau:

a) $A = \cot\text{an}\frac{\pi}{18}.\cot\text{an}\frac{7\pi}{18}.\cot\text{an}\frac{13\pi}{18}$

b) $B = 64\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65}$

Đáp số: a) $A = -\sqrt{3}$

b) $B = 1$

6. Rút gọn các biểu thức:

a) $P = \cos(a + b + c) + \cos(-a + b + c) + \cos(a - b + c) + \cos(a + b - c)$

b) $Q = \sin(a + b + c) + \sin(-a + b + c) + \sin(a - b + c) + \sin(a + b - c)$

Đáp số: a) $P = 4\cos a.\cos b.\cos c$

b) $Q = 4\cos a.\cos b.\sin c$.

7. Chứng minh rằng:

a) $\tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\text{an}\frac{a}{2^n} - 2\cot\text{an}2a$.

b) $\sin\frac{a}{2}(\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na) = \sin\frac{n+1}{2}a.\sin\frac{n}{2}a$.

B3. Bài tập nâng cao

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \tan^6\frac{\pi}{18} + \tan^6\frac{5\pi}{18} + \tan^6\frac{7\pi}{18}$$

Giải

Ta có: $\tan^2\left(3.\frac{\pi}{18}\right) = \tan^2\left(3.\frac{5\pi}{18}\right) = \tan^2\left(3.\frac{7\pi}{18}\right) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}$ là các nghiệm của phương trình:

$$\tan^3 3x = \frac{1}{3}\ \left(x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9\tan^2x + \tan^6x - 6\tan^4x = \frac{1}{3}(1 - 6\tan^2x + 9\tan^4x)$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^6x - 27\tan^4x + 33\tan^2x - 1 = 0$$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\pi}{18}, \tan^2\frac{5\pi}{18}, \tan^2\frac{7\pi}{18}$ là các nghiệm của phương trình bậc 3

$$3y^3 - 27y^2 + 33y - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ Theo định lý Viet:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 9 \\ y_1.y_2 + y_2.y_3 + y_3.y_1 = 11 \\ y_1.y_2.y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow P = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1 + y_2 + y_3) \times$

$(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) + 3y_1y_2y_3$

$$= 9^3 - 3\,.\,9\,.\,11 + 3\,.\,\frac{1}{3} = 433.$$

Chú ý: Bài toán trên có áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)]$$

$$= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Bài 2. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2006)

Giải

Xét phương trình: cos4x = cos3x

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow 8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - \cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $t_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7}$, $t_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7}$ là các nghiệm của phương trình: $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Theo định lý Viet

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = -1 \\ t_1.t_2 + t_2.t_3 + t_3.t_1 = -2 \\ t_1.t_2.t_3 = 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} A = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} + \sqrt[3]{t_3} \\ B = \sqrt[3]{t_1t_2} + \sqrt[3]{t_2t_3} + \sqrt[3]{t_3t_1} \end{cases}$

Sử dụng hằng đẳng thức:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 = A^3 - 3AB \\ -5 = B^3 - 3AB \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^3 = 3AB - 4 \\ B^3 = 3AB - 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow (AB)^3 = (3AB - 4)(3AB - 5) = 9(AB)^2 - 27(AB) + 20$

$\Leftrightarrow (AB)^3 - 3(AB)^2.3 - 3(AB).3^2 - 3^3 = -7$

$\Leftrightarrow (AB - 3)^3 = -7$

$\Leftrightarrow AB = 3 - \sqrt[3]{7}$

$\Rightarrow A^3 = 3(3 - \sqrt[3]{7}) - 4 = 5 - 3\sqrt[3]{7}$

Vậy $A = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$

Bài 3. Cho ΔABC có $A < C < \frac{\pi}{2}$ và m, n, p thỏa

$$\frac{m}{\cos A} + \frac{n}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{p}{\cos C} = 0$$

Chứng minh rằng: $mx^2 + nx + p = 0$ có nghiệm trên $(0, 1)$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2006)

Giải

Ta có:

- $\cos A.\cos C = \frac{1}{2}[\cos(A - C) + \cos(A + C)] < \frac{1}{2}(1 - \cos B) = \sin^2\frac{B}{2}$

- $0 < A < C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2A + B < A + B + C = \pi$

$\Rightarrow 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2} - A < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{B}{2} < \cos A$

Đặt $u = \cos A$, $v = \sin\frac{B}{2}$, $w = \cos C \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{u}{v} < 1 \\ 0 < uw < v^2 \end{cases}$

- Nếu $p = 0 \Rightarrow \frac{m}{u} + \frac{u}{v} = 0$

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (với $f(x) = mx^2 + nx + p$, $x \in \mathbb{R}$) có vô số nghiệm $\in (0, 1)$

+ Nếu $m \neq 0 \Rightarrow -\frac{n}{m} = \frac{u}{v} \in (0, 1) \Rightarrow f(x) = mx\left(x + \frac{n}{m}\right) = 0$ có nghiệm $\in (0, 1)$

- Nếu $p \neq 0$ thì

$$\frac{m}{u} + \frac{n}{v} + \frac{p}{u} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u}{v^2}\left(m.\frac{v^2}{u^2} + n.\frac{v}{n} + p\right) - \frac{uw - v^2}{v^2.w}.p = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0).f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{uw - v^2}{uw}.f^2(0) < 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm } \in \left(0, \frac{v}{u}\right) \subset (0, 1)$$

Bài 4. Chứng minh rằng:

$$\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11} \qquad (1)$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

Giải

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{11}$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow \tan 3\alpha + 4\sin 2\alpha = \sqrt{11}$

$\Leftrightarrow \sin 3\alpha + 4\sin 2\alpha.\cos 3\alpha = \sqrt{11}\cos 3\alpha$ (2)

$\Leftrightarrow (\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha - 2\sin\alpha)^2 = 11\cos^2 3\alpha$ (vì cả hai vế đều dương)

$\Leftrightarrow \sin^2 3\alpha + 4\sin^2 5\alpha + 4\sin^2\alpha + 4\sin 3\alpha.\sin 5\alpha - 4\sin 3\alpha.\sin\alpha$
$- 8\sin 5\alpha.\sin\alpha - 11\cos^2 3\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 6\alpha}{2} + 2(1 - \cos 10\alpha) + 2(1 - \cos 2\alpha) + 2(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)$
$- 2(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) - 4(\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) - \frac{11}{2}(1 + \cos 6\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow - 2(\cos 10\alpha + \cos 8\alpha + \cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos 2\alpha) = 1$

$\Leftrightarrow - 2\sin\alpha(\cos 10\alpha + \cos 8\alpha + \cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos 2\alpha) = \sin\alpha$
(vì $\sin\alpha \in (0, 1)$)

$\Leftrightarrow \sin 11\alpha - \sin 9\alpha + \sin 9\alpha - \sin 7\alpha + \sin 7\alpha - \sin 5\alpha + \sin 5\alpha$
$- \sin 3\alpha + \sin 3\alpha - \sin\alpha = -\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \sin 11\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \sin\pi = 0$ (Hiển nhiên đúng) $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 5. Chứng minh rằng:

a) $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha.\sin(60^0 - \alpha).\sin(60^0 + \alpha),\ \forall\alpha \in [0^0, 360^0]$

b) $\sin 2^0.\sin 18^0.\sin 22^0.\sin 38^0.\sin 42^0.\sin 58^0.\sin 62^0.\sin 78^0.\sin 82^0$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

Giải

a) Ta có:

$$4\sin\alpha.\sin(60^0 + \alpha).\sin(60^0 - \alpha) = 2\sin\alpha[\cos 2\alpha - \underbrace{\cos 120^0}_{-\frac{1}{2}}]$$

$$= 2\sin\alpha.\cos 2\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha.$$

b) Theo kết quả câu a, ta có:

$$\sin 2^0.\sin 18^0.\sin 22^0.\sin 38^0.\sin 42^0.\sin 58^0.\sin 62^0.\sin 78^0.\sin 82^0$$

$$= (\sin 2^0.\sin 58^0.\sin 62^0).(\sin 18^0.\sin 42^0.\sin 78^0)(\sin 22^0.\sin 38^0.\sin 82^{(0)})$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 6^0\right)\left(\frac{1}{4}\sin 54^0\right)\left(\frac{1}{4}\sin 66^0\right) = \frac{1}{64}(\sin 6^0.\sin 54^0.\sin 66^0)$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{4}\sin 18^0\right) = \frac{1}{256}\sin 18^0$$

$$= \frac{1}{256}.\frac{\sqrt{5}-1}{1024} \text{ (vì } \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{1024} \text{ (kết quả bài 18a mục B1))}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$$

Bài 6. Cho α, β, γ thỏa $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = m$

Chứng minh rằng: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) = m$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = s \\ \beta + \gamma = u \\ \gamma + \alpha = v \\ \alpha + \beta = w \end{cases} \left(\Rightarrow \begin{cases} \alpha = s - u \\ \beta = s - v \\ \gamma = s - w \end{cases}\right)$$

Khi đó:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\cos s} = \dfrac{\cos(s-u)}{\cos s} = \dfrac{\cos s.\cos u + \sin s.\sin u}{\cos s} = \cos u + \sin u.\tan s \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin s} = \dfrac{\sin(s-u)}{\sin s} = \dfrac{\sin s.\cos u - \sin u.\cos s}{\sin s} = \cos u - \sin u.\cot s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{\cos s} = \cos u + \cos v + \cos w \\ \qquad\qquad + (\sin u + \sin v + \sin w)\tan s \quad (1) \\ \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin s} = \cos u + \cos v + \cos w \\ \qquad\qquad - (\sin u + \sin v + \sin w)\cot s \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế với vế, ta có:

$$(\sin u + \sin v + \sin w)\underbrace{(\tan s + \cot s)}_{(\neq 0?)} = 0$$

$\Rightarrow \sin u + \sin v + \sin w = 0$

$\Rightarrow \cos u + \cos v + \cos w = m$

Bài 7. Chứng minh rằng phương trình $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$

có nghiệm $x_0 \in \left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\right)$

Giải

Với $0 \le \alpha \le \pi$, ta có:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}{2}$$

- Lấy $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$
- Lấy $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

Bài toán trở thành: Chứng minh phương trình đã cho có nghiệm

$$x_0 = \cos\beta,\ \beta \in \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{16}\right)$$

Xét phương trình: $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0,\ x \in (0, 1)$ (*)

Đặt: $x = \cos\varphi,\ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\text{Phương trình} &\Leftrightarrow 64\cos^6\varphi - 96\cos^4\varphi + 36\cos^2\varphi - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow 2[2(16\cos^6\varphi - 24\cos^4\varphi + 9\cos^2\varphi) - 1] - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2[2(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi)^2 - 1] - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2(2\cos^2 3\varphi - 1) - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\cos 6\varphi - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \cos 6\varphi = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $x_0 = \cos\frac{\pi}{18}$ là nghiệm của phương trình (*).

Vì $\beta = \frac{\pi}{18} \in \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{16}\right)$, nên ta có đpcm.

Bài 8. Cho $\begin{cases} 0 < x, y, z < 1 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Giải

Đặt $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \\ z = \tan\gamma \end{cases} \quad \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right)$

Từ: $xy + yz + zx = 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \tan\alpha.\tan\beta + \tan\beta.\tan\gamma + \tan\gamma.\tan\alpha = 1\\
&\Rightarrow \tan\alpha(\tan\beta + \tan\gamma) = 1 - \tan\beta.\tan\gamma > 0\\
&\Rightarrow \text{cotan}\alpha = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta.\tan\gamma} = \tan(\beta + \gamma)\\
&\Rightarrow \tan(\beta + \gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\\
&\Rightarrow \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Do $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ (vì } k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = \pi - 2\gamma$$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha + 2\beta) = \tan(\pi - 2\gamma) = -\tan 2\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 2\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan 2\alpha . \tan 2\beta} = -\tan 2\gamma$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma$$

$$= \tan 2\alpha . \tan 2\beta . \tan 2\gamma \le \left(\frac{\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma}{3}\right)^3 \text{ (Do BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \ge 3\sqrt{3}$$

(Để ý: $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \tan 2\alpha, \tan 2\beta, \tan 2\gamma > 0$)

$$\Rightarrow \frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} = \frac{1}{2}(\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma) \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Chú ý: Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp sử dụng BĐT Cauchy như sau:

Theo BĐT Cauchy ba số:

$$2x^2(1 - x^2)(1 - x^2) \le \left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow 0 < x(1 - x^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1 - x^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

Chứng minh tương tự:

$$\begin{array}{l} \quad \dfrac{y}{1-y^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \\ + \\ \quad \dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}z^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 9. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ 0 < c \leq \min\left\{\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}\right\}.(a^3 + b^3) \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P(x, y) = \frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b} \text{ trên miền}$$

$D = \{(x, y) \in R^2 / \text{ asinx + bcosy} = c\}$.

Giải

Theo BĐT Bunhiacopski:

$$c^2 = (a.\sin x + b.\cos y)^2 = \left(a^{\frac{3}{2}}.\frac{\sin x}{a^{\frac{1}{2}}} + b^{\frac{3}{2}}.\frac{\cos y}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^2$$

$$\leq (a^3 + b^3)\left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b}\right) \leq (a^3 + b^3)\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b}\right)\right]$$

$$\Rightarrow P(x, y) = \frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$$

$$\text{Dấu "=" } \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin x}{a^2} = \dfrac{\cos y}{b^2} \\ a\sin x + b\cos y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{a^2 c}{a^3 + b^3} \in (0, 1] \\ \cos y = \dfrac{b^2 c}{a^3 + b^3} \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\left(\text{vì } 0 < c \leq \min\left\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right\}.(a^3 + b^3)\right)$$

Vậy $\max\limits_{(x,y)\in D} P(x, y) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$

Bài 10. Cho $\frac{\pi}{3} \le \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\cos\alpha + \cos\beta} - 1 \le \sqrt{\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right)} \qquad (*)$$

Giải

Ta có: $\frac{\pi}{3} \le \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 0 < \cos\alpha, \cos\beta \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < A = \cos\alpha + \cos\beta \le 1 \\ 0 < B = \cos\alpha.\cos\beta \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2}{A} - 1 \le \sqrt{1 - \frac{A}{B} + \frac{1}{B}} \Leftrightarrow \frac{2 - A}{A} \le \sqrt{\frac{1 - A + B}{B}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2 - A)^2}{A^2} \le \frac{1 - A + B}{B}$$

$$\Leftrightarrow B(4 - 4A + A^2) \le A^2(1 - A + B)$$

$$\Leftrightarrow A^3 - A^2 - 4AB + 4B \le 0$$

$$\Leftrightarrow (A - 1)(A^2 - 4B) \le 0$$

BĐT cuối đúng,

$$\text{vì} \begin{cases} 0 < A \le 1 \\ A^2 - 4B = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 4\cos\alpha.\cos\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 \ge 0 \end{cases}$$

B4. Bài tập nâng cao đề nghị

1. Chứng minh $\sin 1^0$ là số vô tỷ

2. a) Chứng minh rằng:

$$\cos 7\alpha = \cos\alpha(64\cos^6\alpha - 112\cos^4\alpha + 56\cos^2\alpha - 7),\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

b) Tính

$$P = \frac{4\cos^2\frac{\pi}{14}.\cos^2\frac{3\pi}{14}.\cos^2\frac{5\pi}{14}}{\cos^2\frac{\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{5\pi}{14}}$$

Đáp số: $P = \dfrac{1}{3}$

3. Chứng minh rằng:

a) $4\cos 36^0 + \text{cotan}\,7^0 30' = \sum\limits_{i=1}^{6}\sqrt{i}$

b) $\cos\dfrac{8\pi}{35} + \cos\dfrac{12\pi}{35} + \cos\dfrac{18\pi}{35} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}\sin\dfrac{\pi}{5}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

4. Cho $\begin{cases} 0 \le \alpha \le \gamma \le 2\pi \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng: α, β, γ lập thành cấp số cộng với công sai $d = \dfrac{2\pi}{3}$

5. Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho:

$$(\tan^6 20^0 - 33\tan^4 20^0 + 27\tan^2 20^0)^n - 1 \ \vdots\ 2^{2004}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Đáp số: $n = 2^{2002}$

6. Cho $\dfrac{d^2 - 1}{1 + 2d\cos\alpha + d^2} = \dfrac{1 + 2d\cos\beta + d^2}{d^2 - 1}$ $\left(\text{với } d \ne 1; \alpha, \beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Chứng minh rằng:

$$\frac{d + \cos\beta}{d + \cos\alpha} = -\frac{1 + d\cos\beta}{1 + d\cos\alpha}$$

7. a) Chứng minh rằng:

$$\tan 5\alpha = \tan\alpha.\frac{\tan^4\alpha - 10\tan^2\alpha + 5}{5\tan^4\alpha - 10\tan^2\alpha + 1}$$

b) Tính $R = \text{cotan}\frac{\pi}{5}.\text{cotan}\frac{2\pi}{5}.\text{cotan}\frac{3\pi}{5}.\text{cotan}\frac{4\pi}{5}$

Đáp số: $R = \frac{1}{5}$

8. Cho $\begin{cases} 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \\ \tan\beta = 3\tan\alpha \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\alpha \geq \beta - \frac{\pi}{6}$.

C/ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

C1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Giải phương trình:

$\sin(\pi.\cos x) = 1$

Giải

Ta có: $\sin(\pi\cos x) = 1$

$$\Leftrightarrow \pi\cos x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} + 2k$$

Do: $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2} + 2k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \text{ (vì } k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm cần tìm là: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 2. Giải phương trình:

$$\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$$

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 3. Giải phương trình:

$$\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos x(1 + \cos x)$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x + k2\pi \\ 2x = x - \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k.\frac{2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Bài 4. Giải phương trình:

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8} \qquad (1)$$

Giải

$$\text{VT (1)} = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$- 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}.\cos^2 2x + 1 - \frac{1}{2}\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

Do đó: Phương trình (1) $\Leftrightarrow 10 - 4\cos 2x - 2\cos^2 2x = 9$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 4\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2} = \cos\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos 2x = \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2} \quad (< -1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\alpha}{2} + k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 5. Giải phương trình:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$$

Giải

Phương trình:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + 4\sin x$$

$$= 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} + 1 - \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - (2\sqrt{2} + 1)\sin x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \sqrt{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 6. Giải phương trình:

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x} = 4\cos x - \sqrt{3}$$

Giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4\sqrt{6}-(16.\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x = (4\cos x - \sqrt{3})^2 \\ \cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+4\sqrt{6}-(16.\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x = 16\cos^2 x - 8\sqrt{3}\cos x + 3 \\ \cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} = 0 \\ \cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ \cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 7. Cho phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = m\sin 2x - \dfrac{1}{2}$

a) Giải phương trình khi $m = 1$.

b) Cho $|m| \geq 1$, hãy chứng tỏ rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = m\sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2m.\sin 2x - 3 = 0$$

a) Khi $m = 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -3 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$$

b) Đặt $f(t) = t^2 + 2mt - 3$, với $t = \sin x \in [-1, 1]$

Ta có $f(1).f(-1) = (-2 + 2m)(-2 - 2m) = 4(1 - m^2) \le 0 \ \forall \ |m| \ge 1$

$\Leftrightarrow f(t) = 0$ có nghiệm trên $[-1, 1] \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 8. Giải phương trình: $\cos^{2009}x + x^{2008} = 0$

Giải

Ta có: $\cos^{2009}x + x^{2008} = 0$

$\Leftrightarrow x^{2008} = -\cos^{2009}x$

Do $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow x^{2008} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Mà $[-1, 1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x > 0 \ , \forall x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow -\cos^{2009}x < 0 \ , \forall x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow x^{2008} \ge 0 > -\cos^{2009}x \ , \forall x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 9. Cho hai phương trình:

$2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$ **(1)**

$4\cos^2x - \cos 3x = (a - 1)\cos x - |a - 5|(1 + \cos 2x)$ **(2)**

Tìm a để (1) và (2) tương đương.

Giải

- Phương trình (1) $\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 1 = \cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2x = \cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

- Phương trình (2) $\Leftrightarrow 4\cos^2x - (4\cos^3x - 3\cos x)$

$= (a - 1)\cos x - 2|a - 5|\cos^2x$

$$\Leftrightarrow \cos x[4\cos^2 x - 2(|a-5|+2)\cos x + (a-4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x - 2(|a-5|+2)\cos x + (a-4) = 0 \ (3) \end{array}\right.$$

Do đó để phương trình (1) và (2) tương đương thì $\cos x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của (3), tức là:

$$1 - (|a-5|+2) + (a-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow |a-5| = a-5$$

$$\Leftrightarrow a \geq 5$$

Khi đó (3) trở thành

$$4\cos^2 x - 2(a-3)\cos x + (a-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{a-4}{2} \end{array}\right.$$

Vì vậy với điều kiện $a \geq 5$, các phương trình (1) và (2) tương đương với nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a-4}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a-4}{2} > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a > 6 \end{array}\right.$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a > 6 \end{array}\right.$

Bài 10. Giải phương trình: $3(\cos x + \sin x) + 2\sin 2x + 3 = 0$

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + 45^0)$, $|t| \leq \sqrt{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow 3t + 2(t^2 - 1) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- $t = -1$: $\sin x + \cos x = -1$

$$\Leftrightarrow \sin(x + 45^0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(-45^0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 45^0 = -45^0 + k360^0 \\ x + 45^0 = 180^0 + 45^0 + k360^0 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -90^0 + k.360^0 \\ x = 180^0 + k.360^0 \end{array}\right.$$

- $t = -\frac{1}{2}$: $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin(x + 45^0) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha,\ 180^0 < \alpha < 270^0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 45^0 = \alpha + k.360^0 \\ x + 45^0 = 180^0 - \alpha + k.360^0 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - 45^0 + k.360^0 \\ x = 135^0 - \alpha + k.360^0 \end{array}\right.$$

Bài 11. Giải phương trình: $5\cos 2x - 12\sin 2x = 13$

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{5}{13}\cos 2x - \frac{12}{13}\sin 2x = 1$

Đặt $\sin\varphi = \frac{12}{13}\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{5}{13}$

Khi đó:

Phương trình $\Leftrightarrow \cos\varphi.\cos 2x - \sin\varphi.\sin 2x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + \varphi) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\varphi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 12. Tìm nghiệm thuộc $(0, 2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

(ĐH & CĐ, khối A, năm 2002)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow 5[\sin x(1 + 2\sin 2x) + \cos 3x + \sin 3x]$

$$= (1 + 2\sin 2x)(\cos 2x + 3)$$

$\Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x) = (1 + 2\sin 2x)(\cos 2x + 3)$

$\Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x + \sin 3x) = (1 + 2\sin 2x)(\cos 2x + 3)$

$\Leftrightarrow 5(1 + 2\sin 2x)\cos x = (1 + 2\sin 2x)(\cos 2x + 3)$

$\Leftrightarrow 5\cos x = \cos 2x + 3 \left(\text{vì} \sin 2x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 2\,(\text{loại})\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3}\\ x = \dfrac{5\pi}{3}\end{array}\right. (\text{vì } x \in (0, 2\pi))$$

Rõ ràng các nghiệm này thỏa điều kiện $\sin 2x \neq -\dfrac{1}{2}$

Vậy: $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3}\\ x = \dfrac{5\pi}{3}\end{array}\right.$ là các nghiệm cần tìm.

Bài 13. Giải phương trình:

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$$

(ĐH & CĐ, khối B, năm 2002)

Giải

Phương trình:

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 6x}{2} - \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 10x}{2} - \frac{1 + \cos 12x}{2}$$

$\Leftrightarrow (\cos 12x + \cos 10x) - (\cos 8x + \cos 6x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 11x.\cos x - \cos 7x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 11x - 2\cos 7x) = 0$

$\Leftrightarrow -2\cos x.\sin 2x.\sin 9x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \sin 9x = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{k\pi}{9}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 14. Giải phương trình trên [0, 14]

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

(ĐH & CĐ, khối D, năm 2002)

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(\cos 2x + 1) + 3\cos x = 0$

(vì $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$)

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 2 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Mà: $0 \le x \le 14 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{2} + k\pi \le 14$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le -\frac{1}{2} + \frac{14}{\pi}$$

$\Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (vì $k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Vậy: } \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}\\ x = \frac{3\pi}{2}\\ x = \frac{5\pi}{2}\end{array}\right.$$

là các nghiệm cần tìm của phương trình đã cho.

Bài 15. Xác định m để phương trình:

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x + m = 0 \qquad (1)$$

có nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x) + \cos 4x + 2\sin 2x + m = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x + m = 0$$

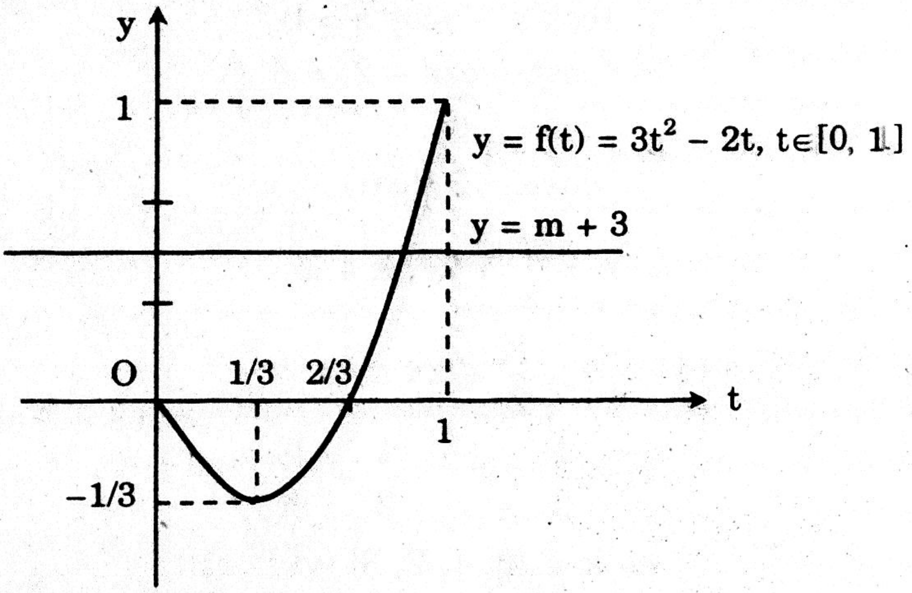
$\Leftrightarrow -3\sin^2 2x + 2\sin 2x + 3 + m = 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 2t - (m + 3) = 0,\ t = \sin 2x \in [0, 1]\ (2)\ \left(\text{vì } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Do đó: Phương trình (1) có nghiệm $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $\in [0, 1]$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le m + 3 \le 1 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \le m \le -2$



Bài 16. Giải phương trình: $\tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x)\sin 3x}{\cos^4 x}$

Giải

Điều kiện: $\cos x \ne 0$

Pt $\Leftrightarrow \sin x^4 + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x = 2(2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2 - \sin^2 2x)}_{>0}\left(\sin 3x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k.2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k.2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Bài 17. Giải phương trình: $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x\left(1 + \tan x.\tan\frac{x}{2}\right)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos\frac{x}{2} \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ 2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0, -1$

Ta có: $1 + \tan x.\tan\frac{x}{2} = 1 + \dfrac{\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\cos x.\cos\frac{x}{2} + \sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

Do đó: phương trình $\Leftrightarrow \tan x + \cos x - \cos^2 x = \tan x$

$\Leftrightarrow \cos x(1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 1$ (vì $\cos x \neq 0$)

$\Leftrightarrow x = k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 18. Cho phương trình: $\dfrac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = a$ (a là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $a = \frac{1}{3}$

b) Tìm a để phương trình có nghiệm.

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow (2 - a)\sin x + (2a + 1)\cos x = 3a - 1$

a) Phương trình $\Leftrightarrow 5\sin x + 5\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (2 - a)^2 + (2a + 1)^2 \geq (3a - 1)^2$

$\Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 + 4a^2 + 4a + 1 \geq 9a^2 - 6a + 1$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 6a - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq 2$

Bài 19. Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \sin x < 1 \ (*)$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{8\cos^2 x} = \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

- **k = 8*l* (*l* ∈ ℤ):** $x = \dfrac{\pi}{8} + l.2\pi$ thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 1 (*l* ∈ ℤ):** $x = \dfrac{3\pi}{8} + l.2\pi$ thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 2 (*l* ∈ ℤ):** $x = \dfrac{5\pi}{8} + l.2\pi$ thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 3 (*l* ∈ ℤ):** $x = \dfrac{7\pi}{8} + l.2\pi$ thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 4 (*l* ∈ ℤ):** $x = \pi + \dfrac{\pi}{8} + l.2\pi$ không thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 5 (*l* ∈ ℤ):** $x = \pi + \dfrac{3\pi}{8} + l.2\pi$ không thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 6 (*l* ∈ ℤ):** $x = \pi + \dfrac{5\pi}{8} + l.2\pi$ không thỏa điều kiện (*)
- **k = 8*l* + 7 (*l* ∈ ℤ):** $x = \pi + \dfrac{7\pi}{8} + l.2\pi$ không thỏa điều kiện (*)

Vậy các nghiệm của phương trình là:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + l.2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + l.2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + l.2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{8} + l.2\pi \end{array}\right. \quad (l \in \mathbb{Z})$$

Bài 20. Giải phương trình:

$$\cot\text{anx} - 1 = \frac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

(ĐH & CĐ, khối A, năm 2003)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} + \sin x(\sin x - \cos x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \dfrac{1}{\sin x} = \cos x - \sin x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \sin^2 x - \sin x.\cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \sin^2 x + \dfrac{1}{2}\underbrace{(2 - \sin 2x)}_{>0} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài 21. Giải phương trình:

$$3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x(1 + 2\cos x) + 6\cos^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 + 2\cos x) - \sin^2 x(1 + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (3\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\cos^2 x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ (thỏa điều kiện bài toán).}$$

Bài 22. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos x(2\tan^2 x - 1) = 2$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x + \dfrac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 - \cos 2x = 2 - (1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2\sin^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x)(1 - \cos x) = \cos x(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ 2(1 - \cos x)^2 = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \quad \text{(thỏa điều kiện } \cos x \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k.2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 23. Giải phương trình: $\cot\text{an}x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

(ĐH & CĐ, khối B, 2003)

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4(1 - \cos^2 2x) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x^2 - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \text{ (loại)} \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k.2\pi \ (k \in \mathbb{Z}z)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Bài 24. Giải phương trình:

$$3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$$

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow 3(1 + \cos 4x) - 2\cos^2 x(4\cos^4 x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x.\cos 2x.(2\cos^2 x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x[3\cos 2x - \cos^2 x(2\cos x^2 + 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 3\cos 2x - \cos^2 x(2\cos^2 x + 1) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 6\cos^2 x - 3 - 2\cos^4 x - \cos^2 x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \dfrac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

Bài 25. Giải các phương trình:

a) $2(\sin x - \cos x)^2 = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(CĐ & ĐH Bách khoa Hà Nội, năm 2006)

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 1$

(ĐH tại chức Bách khoa Hà Nội, năm 2006)

Giải

a) Điều kiện: $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k.\pi$$

Phương trình $\Leftrightarrow 2.2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ 4\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k.\pi \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k.\pi \end{array}\right.$$

b) Phương trình $\Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + k.2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + k.2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 26. Giải các phương trình:

a) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$

(Cao đẳng Sư phạm, ĐH Tiền Giang, năm 2006)

b) $\sin^3x + \cos^3x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin2x$

(CĐ Bến Tre, năm 2006)

Giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \sin8x + \sin2x = \cos3x - \cos7x$

$$\Leftrightarrow 2\sin5x.\cos3x = 2\sin5x.\sin2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0 \\ \cos 3x = \sin 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = k\pi \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 3x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k.2\pi \end{array}\right.$$

b) Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\,(1 - \sin\cos x) = 1 - \dfrac{1}{2}\sin2x$

$$\Leftrightarrow (1 - \frac{1}{2}\sin2x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin 2x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Bài 27. Giải phương trình: $\cos x + \cos2x = \sin3x$

(Cao đẳng Bán công – Công nghệ và Quản trị doanh nghiệp TP Hồ Chí Minh, năm 2006)

Giải

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}(\cos\frac{x}{2} - \frac{\sin 3x}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} = \sin\dfrac{3x}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = \sin\frac{3x}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + k2\pi \ \ (k \in Z) \\ \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k.2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k.\pi \quad (k \in Z) \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Bài 28. Giải các phương trình:

a) $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$

(Cao đẳng Kinh tế kĩ thuật Đông Du, năm 2006)

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

(Cao đẳng Sư phạm Quảng Bình, năm 2000)

c) $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$

(Cao đẳng Sư phạm Tây Ninh, năm 2006)

Giải

a) Pt $\Leftrightarrow 1 + \cos x + \sin x + \cos x \sin x = 2$

$\Leftrightarrow$ sincosx $+ \sin x + \cos x - 1 = 0$

Đặt $t = \sin x \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Pt $\Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{2} + t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \ \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

b) Đặt: $t = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2t$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - 3t = \pi - 3t$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\sin 3t = 3\sin t$$

$$\Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t - 3\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t = 0 \quad \Leftrightarrow t = k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

c) Pt $\Leftrightarrow \sin 9x + \sin 5x = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin 7x\cos 2x = \cos 2x \qquad \Leftrightarrow \cos 2x(\sin 7x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 7x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 7x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 7x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{5\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right.$$

Bài 29. Giải các phương trình:

a) $2\sin x + \cos x = \sin 2x + 1$ *(Cao đẳng Y tế I, năm 2006)*

b) $\sin 2x + \cos 2x + \sin x - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$

(Cao đẳng Tài chính Kế Toán, năm 2006)

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2\left(\sin^5 x + \cos^5 x\right)$

(Cao đẳng Sư phạm Hải Phòng, năm 2006)

Giải

a) Pt $\Leftrightarrow (2\sin x - \sin 2x) + (\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ x = k.2\pi \end{array}\right.$$

b) Pt $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x + \sin x - (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - \sin x(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k.\pi \end{array}\right.$$

c) Pt $\Leftrightarrow \sin^3 x\,(1 - 2\sin^2 x) + \cos^3 x(1 - 2\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow -\sin^3 x\cos 2x + \cos^3 x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos^3 x - \sin^3 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos^3 x = \sin^3 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

(vì $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

C2. Bài tập căn bản đề nghị

1. Giải phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

(ĐH & CĐ, khối D, năm 2005)

Đáp số: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Giải các phương trình:

a) $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$

b) $\dfrac{\sin^2 x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

Đáp số: a) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\text{b)} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + k.\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{7\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3. Giải các phương trình:

a) $\sin 4x \, . \, \sin 7x = \cos 3x \cos 5x$

b) $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \cos x} = 1$

Đáp số: a) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{20} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

(Đại học và Cao đẳng, Khối A, năm 2006)

b) $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

(Đại học và Cao đẳng, Khối D, năm 2006)

c) $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

(Đại học và Cao đẳng, Khối D, năm 2007)

Đáp số: a) $x = \dfrac{5\pi}{4} + k.2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$\cos 2x + m\sin x + 2m + 1 = 0$

Đáp số: $-2 \le m \le 0$

6. Tìm m để phương trình:

$\cos 2x = m\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}$ có nghiệm trên $[0, \dfrac{\pi}{3}]$

Đáp số: $-\sqrt{2(\sqrt{3} - 1)} \le m \le 1$

7. Chứng minh rằng phương trình: $\sin^{2008}x + \cos^{2009}x = 1,2345$ luôn vô nghiệm trên [0, 1001].

C3. Bài tập nâng cao

Bài 1. Giải phương trình:

$$3\sqrt{\tan x + 1}\,(\sin x + 2\cos x) = 5\,(\sin x + 3\cos x) \quad (1)$$

(Đại học Quốc gia. Tp Hồ Chí Minh)

Giải

Điều kiện: $t = \tan x \geq -1$

Khi đó: Pt (1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{\tan x + 1} = \dfrac{5(\sin x + 3\cos x)}{\sin x + 2\cos x}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{t+1} = 5.\frac{t+3}{t+2} \qquad (2)$$

Ta lại có: $\begin{cases} f(t) = 3\sqrt{t+1} \text{ tăng trên } [-1, +\infty) \\ g(t) = 5.\dfrac{t+3}{t+2} \text{ giảm trên } [-1, +\infty) \\ f(3) = g(3) = 6 \end{cases}$

Do đó: Pt (2) $\Leftrightarrow t = 3$

$$\Leftrightarrow \tan x = 3 = \tan\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$\sin^{2009}x + \cos^{2009}x = 1$$

Giải

Ta có: $\sin^{2009}x + \cos^{2009}x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^{2009}x + \cos^{2009}x = \sin^2x + \cos^2x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin^2x\,(1 - \sin^{2007}x)}_{\geq 0} + \underbrace{\cos^2x\,(1 - \cos^{2007}x)}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2x(1 - \sin^{2007}x) = 0 \\ \cos^2x(1 - \cos^{2007}x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k.2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3. Giải phương trình:

$$6 - 4x - x^2 = \frac{5}{\left|\sin\frac{y}{x}.\cos\frac{y}{x}\right|}$$

(Đại học và Cao đẳng Giao thông vận tải)

Giải

Ta có: $VT = 6 - 4x - x^2 = 10 - (x^2 + 4x + 4)$

$= 10 - (x + 2)^2 \leq 10$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 2$

$$VP = \frac{10}{\left|\sin\frac{2y}{x}\right|} \geq 10 \ \forall \ \frac{2y}{x} \in k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left|\sin\frac{2y}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{2y}{x} = 0$

Do đó Pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Bài 4. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{2 - x^2}\sin x + \sqrt{2 + x^2}\cos x = |a + 1| + |a - 1| \quad (1)$$

(Đại học Bách khoa Hà Nội)

Giải

Điều kiện: $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2}$

- Nếu phương trình có nghiệm x thì

$$\left(|a + 1| + |a - 1|\right)^2 \leq \left(2 - x^2 + 2 + x^2\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

(Do BĐT Bunhiacopski)

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2 + 2\,|a^2 - 1| \leq 4$

$\Leftrightarrow |a^2 - 1| \leq 1 - a^2$

$\Leftrightarrow |a| \leq 1$

- Giả sử $|a| \leq 2$ $\left(|a + 1| + |a - 1| = 2\right)$

Khi đó PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2}\ \sin x + \sqrt{2 + x^2}\cos x = 2 \qquad (2)$

Theo BĐT Bunhiacopski

$$\sqrt{2-x^2}\,\sin x + \cos x \le 2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{\dfrac{2-x^2}{2+x^2}} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \sqrt{2} \\ \tan^2 x = \dfrac{2-x^2}{2+x^2} \end{cases}$

Do đó: PT (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \sqrt{2} \\ \tan^2 x = \dfrac{2-x^2}{2+x^2} \end{cases}$ (3)

Vì $y = \tan^2 x$ đồng biến và $Z = \dfrac{2-x^2}{2+x^2} = \dfrac{4}{2+x^2} - 1$ nghịch biến (trên $[0, \sqrt{2}]$) nên ta có bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{2}$
$y = \tan^2 x$	0	$\nearrow$	$\tan^2\sqrt{2}$
$z = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$	1	$\searrow$	0

Từ đó dễ thấy rằng hệ (3) có nghiệm duy nhất $\in (0, \sqrt{2})$

Vậy: * $|a| \le 1$: Pt (1) có nghiệm duy nhất $\in (0, \sqrt{2})$

* $|a| > 1$: Pt (1) vô nghiệm.

Bài 5. Giải phương trình:

$$(16\cos^4 x + 3)^4 = 2048\cos x - 768 \qquad (1)$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ" năm 2003)

Giải

Cách 1: Theo BĐT Cauchy:

$$(16\cos^4 x + 3)^4 + 768 = (16\cos^4 x + 1 + 1 + 1)^4 + 768$$

$$\ge (4\sqrt[4]{16\cos^4 x.1.1.1})^4 + 768$$

$$\ge 4096\cos^4 x + 256 + 256 + 256$$

$$\ge 4\sqrt[4]{4096\cos^4 x.256.256.256}$$

$$\ge 2048|\cos x| \ge 2048\cos x$$

$\Rightarrow (16\cos x^4 + 3)^4 \ge 2048\cos x - 768$

Dấu "=" $\begin{cases} 16\cos^4 x = 1 \\ 4096\cos^4 x = 256 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vậy: $(16\cos^4 x + 3)^4 = 2048\cos x - 768$ có nghiệm là

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2.

Đặt $u = 2\cos x$ $|u| \leq 2$

Pt (1) $\Leftrightarrow (u^4 + 3)^4 = 4^4(4u - 3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 3 = 4\sqrt[4]{4u - 3} \\ u \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Đặt $v = 4\sqrt[4]{4u - 3}$

Ta có hệ: $\begin{cases} u^4 + 3 = 4v\ (2) \\ v^4 + 3 = 4u\ (3) \end{cases}$

Lấy (2) trừ (3) vế với vế, ta được:

$$\Leftrightarrow (u - v)[(u + v)(u^2 + v^2) + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow u = v$$

Thay v = u vào (2) ta được: $u^4 - 4u + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (u - 1)^2(u^2 + 2u + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm cần tìm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 6. a) Giải phương trình:

$$\sin x\cos x(\sin x + \cos x) - \frac{6}{5\sqrt{5}} = 0$$

b) Từ đó giải hệ đại số $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$

(Đại học Sư phạm Hà Nội I)

Giải

a) Đặt: $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{2}.t - \frac{6}{5\sqrt{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - t - \frac{12}{5\sqrt{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - \frac{3}{\sqrt{5}})\underbrace{\left(t^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}t + \frac{4}{5}\right)}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\sqrt{10}} = \sin\varphi,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi - \frac{\pi}{4} + k.2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Giải hệ $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \ (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \ (2) \end{cases}$

Rõ ràng $xy \neq 0$

$$\text{Pt (2)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 + y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \sqrt{5}\cos\varphi \\ y = \sqrt{5}\sin\varphi \end{cases} \left(\varphi \in (0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}\cos\varphi} \\ y = \sqrt{5}\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó, $\text{Pt (1)} \Leftrightarrow \sqrt{5}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{5}\cos\varphi}5\sin^2\varphi = \frac{6}{5.\cos^2\varphi}$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^2\varphi.\cos\varphi = \frac{6}{5\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi\cos\varphi\,(\sin\varphi + \cos\varphi) = \frac{6}{5\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi + \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{5}}$$ (Do kết quả câu a)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi + \cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \\ \sin\varphi.\cos\varphi = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sinφcosφ là nghiệm của phương trình bậc 2:

$$X^2 - \frac{3}{\sqrt{5}}X + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ X = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Chú ý: Câu (b) có thể giải bằng phương pháp đại số thuần túy như sau:

Ta có: $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 6 \\ \left(\dfrac{1}{x} + y\right)^2 - 2\dfrac{y}{x} = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 6 \\ v^2 - 2u = 5 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \neq 0 \\ v = \dfrac{1}{x} + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 - 5}{2} \\ \dfrac{u^2 - 5}{2}v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 - 5}{2} \\ v^3 - 5v - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 - 5}{2} \\ (v-3)\underbrace{(v^2 + 3v + 4)}_{>0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 3 \\ \dfrac{y}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + xy = 3x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Bài 7. Tìm a để phương trình sau có nghiệm:

$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + \sin 3x + 7$

Giải

Đặt $t = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) = (t - 1)(t + 2)$$
$$= t^2 + t - 2 \geq -2$$

$$\Rightarrow VP = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + (1 + \sin 3x) + 6$$
$$\geq -2 + 0 + 6 = 4 \quad (1)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$

Hơn nữa:

$$VT = 4\sin^2 3x \,.\, \sin^2 x \leq 4 \quad (2)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \pm 1 \\ \sin x = \pm 1 \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow VP \geq 4 \geq VT$

$$\Rightarrow VP \geq VT$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \sin 3x = -1 \\ \sin x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

vì $(\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow a = -2$

Bài 8. Tìm a, b sao cho phương trình

$x^2 + 5 = 2(x + 2\cos(ax + b))$ có nghiệm

Giải

Ta có: $x^2 + 5 = 2(x + 2\cos(ax + b))$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4[1 - \cos(ax + b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + 4\underbrace{[1 - \cos(ax + b)]}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \cos(ax + b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a + b = k.2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Đáp số: $a + b = k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 9. Giải phương trình:

$$2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0$$

(Đề thi Olympic 30 – 4, năm 2000)

Giải

Ta có: $2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[\sin 2x - \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \frac{3}{2}] - \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[(\sin x - \cos x)^2 + \sqrt{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}] + 2[\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2[(\sin x - \cos x) + \frac{1}{\sqrt{2}}]^2 + 2[\sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

Bài 10. Giải phương trình:

$$3\left[1 + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\right]^4 + 4\tan^6 x = 7$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2006)

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 1 = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 2 - \tan^2 x \\ v = \tan^2 x \geq 0 \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} 3u^4 + 4v^3 = 7 \\ u + v = 2 \end{cases}$

Theo BĐT Cauchy

$$\begin{cases} u^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4|u| \geq 4u \\ v^3 + 1 + 1 \geq 3v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(u^4 + 3) \geq 12u \\ 4(v^3 + 2) \geq 12v \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3u^4 + 4v^3 + 17 \geq 12(u + v) = 24$$

$$\Rightarrow 3u^4 + 4v^3 \geq 7$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow u = v = 1$

$\Leftrightarrow \tan^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm cần tìm.

Bài 11. Giải phương trình:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x)$$

(Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Giải

Theo BĐT Cauchy:

$$\sin^{14} x + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^7}_{6 \text{ số}} \geq 7\sqrt[7]{\sin^{14} x.\left(\frac{1}{2}\right)^{7.6}} \geq \frac{7}{2^6}\sin^2 x \ ((1)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$

Chứng minh tương tự:

$$\cos^{14} x + 6.\left(\frac{1}{2}\right)^7 \geq \frac{7}{2^6}\cos^2 x \ (2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \cos^2x = \dfrac{1}{2}$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$\sin^{14}x + \cos^{14}x + 12\left(\frac{1}{2}\right)^7 \geq \frac{7}{2^6}(\sin^2x + \cos^2x) = \frac{7}{2^6}$$

$$\Leftrightarrow 64(\sin^{14}x + \cos^{14}x) \geq 1$$

Hơn nữa:

$$\sin^8x + \cos^8x \leq \sin^2x + \cos^2x = 1 \ (4)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^8 x = \sin^2 x\\ \cos^8 x = \cos^2x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 64(\sin^{14}x + \cos^{14}x) \geq \sin^8x + \cos^8x$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x = \cos^2 x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x.\cos x = 0\end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 12. Giải phương trình:

$$\cos x - 3\sqrt{3}\sin x = \cos 7x$$

(Tạp chí "Toán học và tuổi Trẻ")

Giải

Pt $\Leftrightarrow \cos x - \cos 7x - 3\sqrt{3}\ \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x\ \sin 3x - 3\sqrt{3}\ \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin x(3 - 4\sin^2x) - 3\sqrt{3}\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x[2\sin 4x(3 - 4\sin^2x) - 3\sqrt{3}\,] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x = 0 & (1)\\ \sin 4x(1 + 2\cos 2x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (2)\end{array}\right.$$

- (1) $\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (2) $\Leftrightarrow \sin 4x + 4\sin 2x.\cos^2 2x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Theo BĐT Cauchy:

$$1 = \sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos^2 2x \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sin^2 2x.\cos^4 2x}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x.\cos^4 2x \leq \frac{4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos^2 2x \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin 4x + 4\sin 2x.\cos^2 2x \leq 1 + \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C4. Bài tập nâng cao đề nghị

1. Giải các phương trình:

a) $\tan^2 2x + \cot^2 2x = 2\sin^5\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

(Đại học Dân lập Kĩ thuật công nghệ)

b) $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(2 + \sin^2 2x)$

(Học viện Ngâm hàng)

Đáp số: a) $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Giải các phương trình:

a) $\sin^{2008}x + \cos^{2008}x = 1$

b) $\cos^5 x + \sin^5 x + \cos 2x + \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$

(Đại học Nông nghiệp)

Đáp số: a) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $x \in \varnothing$

3. Giải phương trình:

$$\sin^8x + \cos^8x = 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x) + \frac{5}{4}\cos2x$$

(Đại học Ngoại Thương)

Đáp số: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

4. Giải phương trình:

$$\frac{1}{1+\cos2x} + \frac{1}{1+\cos4x} + \frac{1}{1-\cos x} = 2$$

Đáp số: Vô nghiệm

5. Giải và biện luận theo a, b, c phương trình:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab\sin3x + ca\cos2x - bc\sin x)$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Tính giá trị của:

$$P = \sin10^0.\sin50^0.\sin70^0$$

Đáp số:

A. $\frac{\sqrt{4}}{8}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{\sqrt{1}}{8}$

2. Rút gọn biểu thức.

$$Q = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Đáp số:

A. $\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

B. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

C. $\frac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{6})$

D. $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

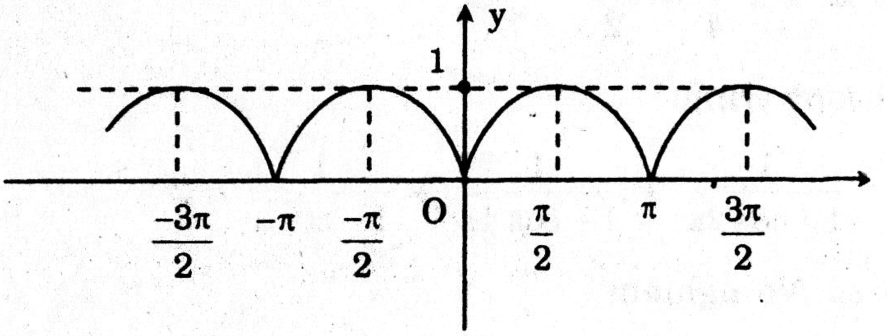
3. a) Tìm chu kì T của hàm số $y = |\sin x|$

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$

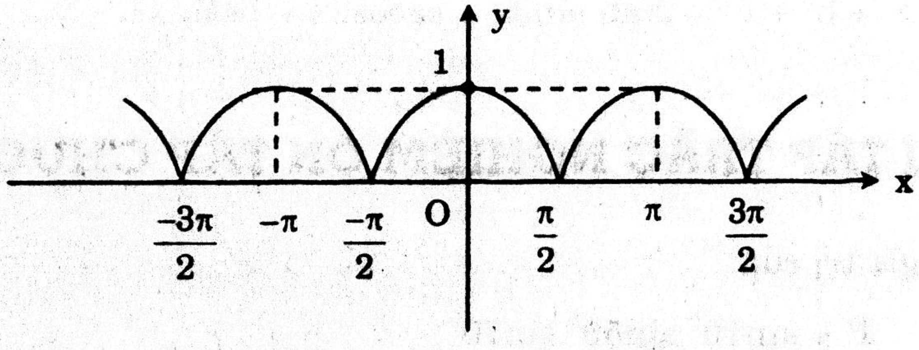
Đáp số:

a) A. $T = 2\pi$ B. $T = \pi$ C. $T = \frac{\pi}{2}$ D. $T = \frac{\pi}{4}$.

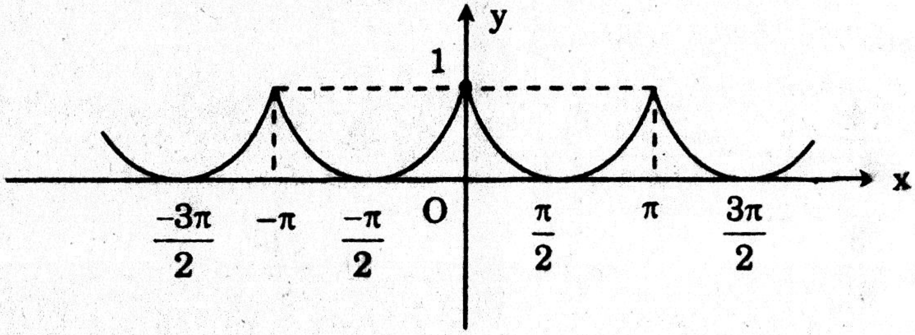
b) A.



B.



C.



D. Một đồ thị khác.

4. Cho $\cos(a + b) = m\cos(a - b)$, $m \neq -1$, $\cos a \cos b \neq 0$

Tính tana, tanb theo m.

Đáp số:

A. $\frac{m-1}{m+1}$ B. $\frac{m-2}{m+1}$ C. $\frac{1-m}{1+m}$ D. $\frac{2-m}{1+m}$.

5. Giải phương trình:

$$\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

Đáp số:

A. $\left[\begin{array}{l} x = k.\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k.2\pi \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k.2\pi \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k.2\pi \end{array}\right.$

6. Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\cos 5x + \sin x - 2\cos 3x = 0$$

Đáp số:

A. $x = \dfrac{k\pi}{9}$

B. $x = \dfrac{k\pi}{11}$

C. $x = \dfrac{k\pi}{13}$

D. Tất cả đều sai.

7. Giải phương trình:

$$\tan^2 x \,.\, \tan^2 3x = 1$$

Đáp số:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{8} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{4} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$

8. Giải phương trình:

$$\sin 2x.\sin 5x.\sin 7x = 1$$

Đáp số:

A. $x = k\pi$

B. $x = \dfrac{k\pi}{3}$

C. $x = \dfrac{\pi}{7} + k\pi$

D. Tất cả đều sai.

9. Trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$, phương trình $3\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 0$ có nghiệm?

Đáp số:

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4.

10. Giải phương trình: $\sin^{2008}x + \cos^{2008}x = 1$ trên $(0; \pi)$

Đáp số:

A. $x = \dfrac{\pi}{6}$　　B. $x = \dfrac{\pi}{8}$

C. $x = \dfrac{\pi}{4}$　　D. Một đáp số khác.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Chọn D.

Ta có: $P = \sin10^0.\sin50^0.\sin70^0$

$$= \sin10^0.\cos20^0.\cos40^0$$

$$\Rightarrow P.\cos10^0 = \sin10^0.\cos10^0.\cos20^0.\cos40^0$$

$$= \frac{1}{2}\sin20^0.\cos20^0.\cos40^0$$

$$= \frac{1}{4}\sin40^0.\cos40^0$$

$$= \frac{1}{8}\sin80^0 = \frac{1}{8}\cos10^0$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{8} \text{ (vì } \cos10^0 \in (0, 1))$$

2. Chọn A.

Ta có: $Q = \left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$+ \left(\cos.\cos\frac{\pi}{6} - \sin\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos x\cos\frac{3\pi}{4} - \sin x\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos^2x + \sqrt{3}\,\text{sinx.cosx} - \text{sinx.cosx} - \sqrt{3}\sin^2x$$

$$- \sqrt{3}\cos^2x + \text{sinx.cosx} - \sqrt{3}\,\text{sinxcosx} + \sin^2x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$$

3. a) Chọn B.

Ta có:

- $y = f(x) = |\sin x|$ có tập xác định là $\mathbb{R}$
- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + \pi \in \mathbb{R}$
- $f(x + 1) = |\sin x(x + \pi)|\ |-\sin x|$

  $= |\sin x| = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f là hàm tuần hoàn.

Tiếp đến, ta sẽ chứng minh d có chu kì $T = \pi$

Quả vậy, nếu có $a \in (0, \pi)$ sao cho $f(x + a) = f(x), \forall n \in \mathbb{R}$

Cho $x = 0 \Rightarrow f(a) = f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \sin a = 0$

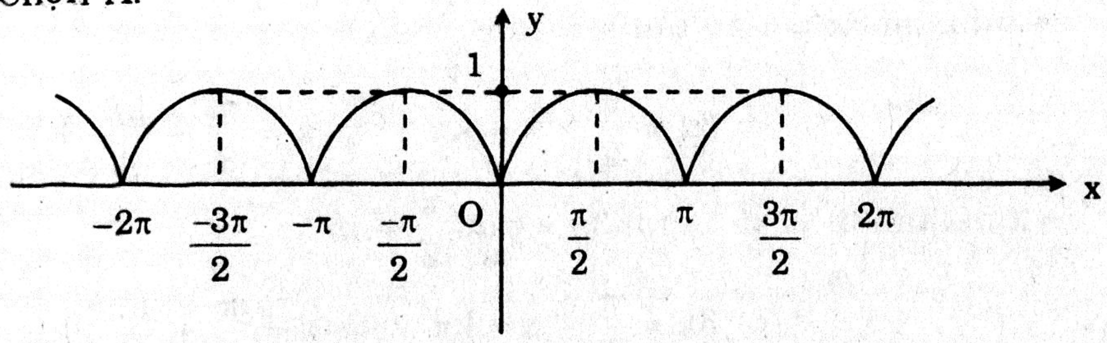
$\Leftrightarrow a = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow 0 < k\pi < \pi$

$\Leftrightarrow 0 < k < 1 \quad \Rightarrow k \in \varnothing$

$\Rightarrow$ Vô lí

Vậy: $y = f(x) = |\sin x|$ có chu kì $T = \pi$

b) Chọn A.



4. Chọn C.

Ta có: $\cos(a + b) = m.\cos(a - b)$

$\Leftrightarrow$ cosa.cosb − sina.sinb = m(cosa.cosb + sina.sinb)

$\Leftrightarrow$ (1 − m)cosa.cosb = (1 + m)sina.sinb

$\Leftrightarrow \text{tana.tanb} = \dfrac{1 - m}{1 + m}$

5. Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \sin^2 x\,(1 + \sin x) = \cos^2 x\,(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin x^3 - \cos^3 x + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x.\cos x + \sin x.\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\underbrace{(1 + \sin x)}_{\neq 0}(1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \cos x \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

6. Chọn D.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin 5x = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos(5x - \frac{\pi}{6}) = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{6} = \pm\, 3x + k.2\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

7. Chọn A.

Pt $\Leftrightarrow \tan x.\tan 3x = \pm\, 1$ (với $\cos 3x.\cos x \neq 0$)

- $\tan x.\tan 3x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

- $\tan x.\tan 3x = -1 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} + x)$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + x \neq k\pi \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

8. Chọn D.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \sin 2x\,\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}(\sin 14x - \sin 10x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \sin 10x - \sin 14x = 4$$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm (vì vế trái $\leq 3 < 4$)

9. Chọn C.

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = \dfrac{2}{3} & \text{(nhận)} \\ \cos x = 2 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Do đó trên $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ phương trình có đúng 3 nghiệm x_1, x_2, x_3

thỏa $-\frac{\pi}{2} < x_1 < 0 < x_2 < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} < x_3 < 2\pi$

10. Chọn D.

* Nếu $x = \frac{\pi}{2}$ thì $\sin^{1008}x + \cos^{2008}x = 1$

* Nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^{2008}x < \sin^2 x \\ \cos^{2008}x < \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^{2008}x + \cos^{2008}x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

* Nếu $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ thì $\begin{cases} 0 < \sin x < 0 \\ -1 < \cos x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 0 < |\cos x| < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^{2008}x < \sin^2 x \\ \cos^{2008}x = |\cos x|^{2008} < |\cos^2 x| = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^{2008}x + \cos^{1008}x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Vậy phương trình: $\sin^{2008}x + \cos^{2008}x = 1$ trên $(0, \pi)$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{2}$

Chương II

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§1. TỔ HỢP

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng:

Một công việc được tiến hành theo một trong n phương án A_1, A_2, ..., A_n:

+ Phương án A_1: có m_1 cách thực hiện

+ Phương án A_2: có m_2 cách thực hiện

……………………………………………………

+ Phương án A_n: có m_n cách thực hiện

Như vậy có tất cả: $m_1 + m_2 + ... + m_n$ cách để thực hiện toàn bộ công việc.

Ví dụ: Từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng ôtô, tàu hỏa, tàu thủy và máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ôtô, 6 chuyến tàu hỏa, 3 tàu thủy và 3 chuyến máy bay. Theo quy tắc cộng, ta có $10 + 6 + 3 + 3 = 22$ sự lựa chọn khác nhau để đi từ tỉnh A đến tỉnh B.

2. Quy tắc nhận:

Một công việc được tiến hành qua n giai đoạn:

+ Giai đoạn A_1: có m_1 cách thực hiện

+ Giai đoạn A_2: có m_2 cách thực hiện

……………………………………………………

+ Giai đoạn A_n: có m_n cách thực hiện

Như vậy có tất cả: $m_1.m_2 ... m_n$ cách thực hiện toàn bộ công việc.

Ví dụ: Có hai phái đoàn, phái đoàn I có 9 người và phái đoàn II có 15 người, mỗi người của phái đoàn này bắt tay tất cả các người của phái đoàn kia (và ngược lại). Khi đó theo quy tắc nhân, ta có tất cả. $9 \times 5 = 135$ cái (bắt tay)

3. Chỉnh hợp (không lặp)

Cho một hợp n phần tử khác nhau. Chỉnh hợp chập k từ n phần tử ($1 \le k \le n$) là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Kí hiệu: A_n^k là số chỉnh hợp chập k từ n phần tử.

Công thức: $$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1).(n-k+1)}$$

(*Quy ước:* $0! = 1$)

Chú ý:

Hai chỉnh hợp khác nhau khi:

+ Có ít nhất một phần tử khác nhau

+ Hoặc có ít nhất một thứ tự sắp xếp khác nhau.

Ví dụ: Có bao nhiêu cách sắp 3 người vào một cái ghế dài 6 chỗ ngồi?

Ta nhận thấy sắp 3 người vào một cái ghế dài 6 chỗ ngồi, tức là lấy 3 đơn vị trong 6 vị trí (có kể thứ tự). Vậy mỗi cách sắp xếp là một chỉnh hợp chập 3 từ 6 phần tử, nên số cách sắp là:

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6.5.4 = 120 \text{ (cách khác nhau)}$$

4 *Chỉnh hợp (lặp)*

Cho một tập hợp có n phần tử khác nhau. Chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho, mỗi phần tử có thể xuất hiện 1, hoặc 2, ... hoặc k lần trong nhóm được tạo thành (k có thể $\ge$ n hoặc $k \le n$).

Kí hiệu: $\bar{A}_n^k$ là số chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử

Công thức: $$\boxed{\bar{A}_n^k = n^k}$$

Ví dụ: Mỗi vé số TPCM có 6 chữ số. Hỏi mỗi đợt phát hành có bao nhiêu vé tất cả?

Ta nhận thấy:

Một vé số là một nhóm có thứ tự gồm 6 chữ số lấy từ tập hợp 10 phần tử {0, 1, ..., 9}

+ Mỗi chữ số có thể xuất hiện nhiều lần trong nhóm (tối đa là 6 lần) vì vậy mỗi vé số được xem là chỉnh hợp lặp chập 6 từ 10 phần tử.

+ Do đó, số vé số phát hành mỗi đợt là $\bar{A}_{10}^6 = 10^6$ vé

5 *Hoán vị:*

Cho tập hợp có n phần tử khác nhau. Hoán vị phần tử là một nhóm thứ tự gồm đủ n phần tử đã cho.

Như vậy:

+ Mỗi hoán vị là sự thay đổi chỗ các phần tử trong tập hợp.

+ Hoán vị n phần tử là chỉnh hợp (không lặp) chập n từ n phần tử.

Kí hiệu: P_n là số hoán vị n phần tử

Công thức: $\boxed{P_n = A_n^n = n!}$

Ví dụ: Có mấy cách sắp xếp khác nhau 4 người vào một bàn ăn có bốn chỗ ngồi?

Ta thấy mỗi cách sắp xếp 4 người vào 1 bàn (4 chỗ), là 1 hoán vị của 4 phần tử.

Như vậy số cách sắp xếp trên là:

$P_4 = 4! = 2.3.4 = 24$ (cách sắp xếp khác nhau)

6. Tổ hợp:

Cho tập hợp n phần tử khác nhau. Tổ hợp chập k từ n phần tử ($0 \le k \le n$) một nhóm không phân biệt thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Kí hiệu: C_n^k hộp là số tổ hợp chập k từ n phần tử.

Công thức: $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

Ví dụ: Một hộp có 10 viên bi (đỏ và đen). Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi để kiểm tra (bi đỏ và bi đen) thì có mấy cách lấy ra 4 viên?

Lấy 4 viên ngẫu nhiên để kiểm tra (bi đỏ và bi đen), không quan tâm đến thứ tự các bi đó, nên đó là một tổ hợp chập 4 của 10 phần tử. Vậy số cách chọn 4 viên trong 10 viên là:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{6!4!} = 210 \text{ (cách khác nhau)}$$

Tính chất cơ bản của tổ hợp

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \le k \le n) \\ \text{b) } C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (1 \le k \le n-1) \end{array}}$$

7. Nhị thức Newton

Với $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k}$$

$$= C_n^k a^n + C_n^k a^{n-1} b + \ldots + C_n^{k-1} ab^{n-2} + C_n^n b^n$$

8. *Một số công thức khác*

- Kí hiệu $(2n)!! = 2.\,4 \ldots (2n)$

  $(2n + 1)!! = 1.3.5\ldots (2n + 1)$

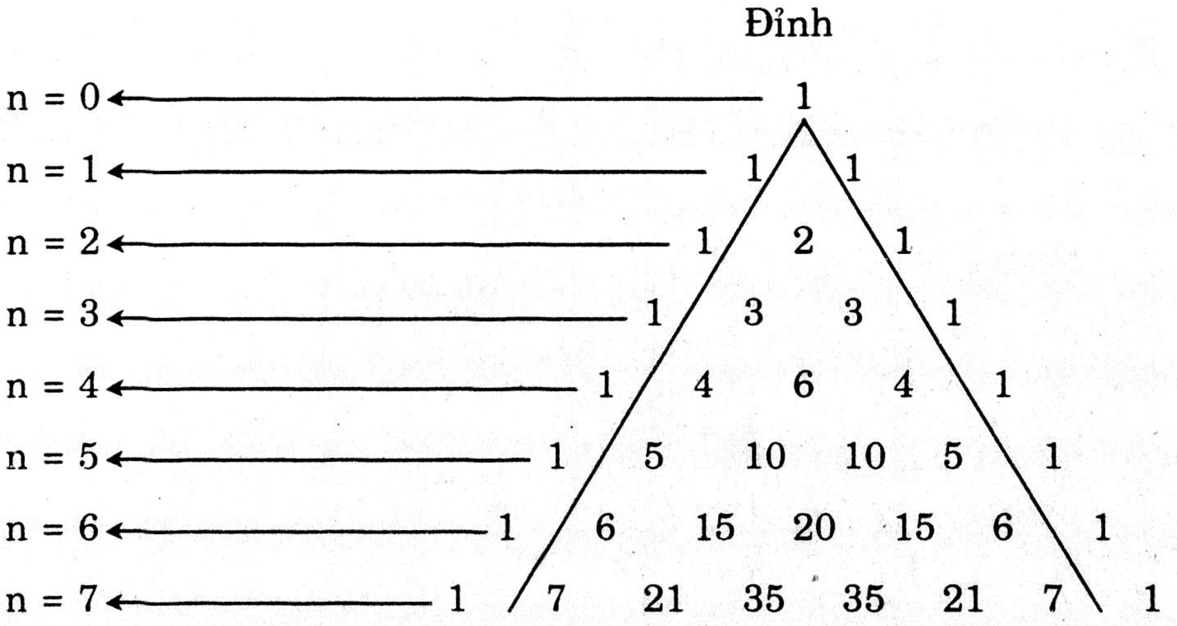
- Các tính chất:

  a) $(n + 1)! = n!.\,(n + 1)$

  b) $\dfrac{n!}{k!} = (k + 1).(k + 2) \ldots$ (với $0 \leq k \leq n$)

- Giới thiệu tam giác Pascal:

Nhờ tính chất $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, ta có thể lần lượt tính được các hệ số của nhị thức Newton $(a + b)^n$ dưới một dãy tam giác, gọi là tam giác Pascal.


Đỉnh
n = 0 1
n = 1 1 1
n = 2 1 2 1
n = 3 1 3 3 1
n = 4 1 4 6 4 1
n = 5 1 5 10 10 5 1
n = 6 1 6 15 20 15 6 1
n = 7 1 7 21 35 35 21 7 1

$(a + b)^0 = 1$ (với $a + b \neq 0$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

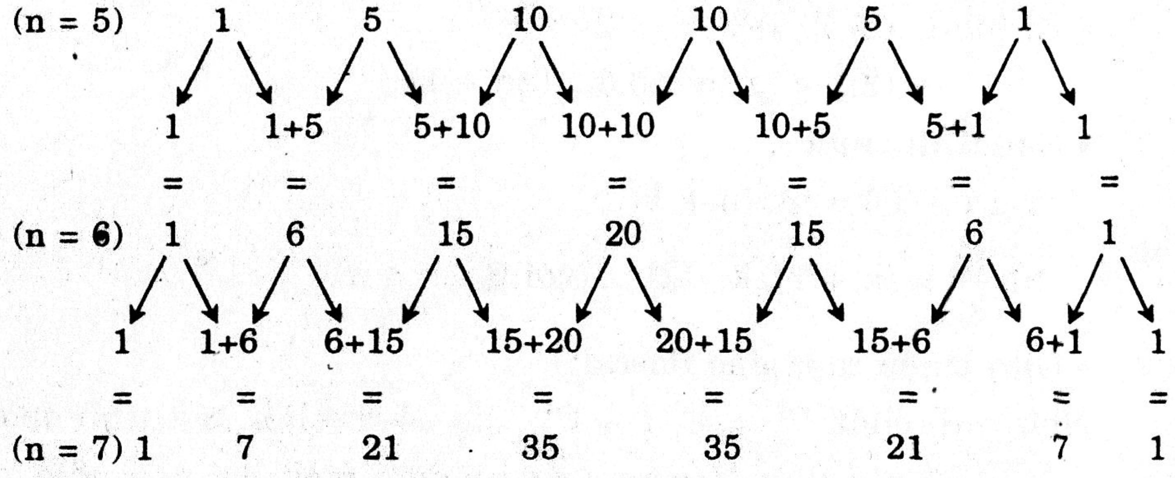
$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Chú ý:

Trong dòng thứ n (n = 0, 1, 2, ...) của dãy tam giác Pacal, có các hệ số của khai triển $(a + b)^n$, trừ hệ số hai đầu bằng 1, còn mỗi hệ số khác bằng tổng hai hệ số tương ứng dòng trên:

Ví dụ


(n = 5) 1 5 10 10 5 1
1 1+5 5+10 10+10 10+5 5+1 1
= = = = = = =
(n = 6) 1 6 15 20 15 6 1
1 1+6 6+15 15+20 20+15 15+6 6+1 1
= = = = = = = =
(n = 7) 1 7 21 35 35 21 7 1

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải phương trình: $C_n^4 + C_n^5 = 3.C_{n+1}^6$ trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử. *(Đề thi TNTHPT, năm 2007)*

Giải

Điều kiện: $5 \le n \in N$

$$Pt \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{3(n+1)!}{6!(n-5)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-4} + \frac{1}{5} = \frac{3(n+1)}{5.6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-4} + \frac{1}{5} = \frac{n+1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{5(n-4)} = \frac{n+1}{10}$$

$$\Leftrightarrow 5(n-4) = 10$$

$$\Leftrightarrow n = 6$$

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$C_{x+1}^{y} : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$$

(Đề thi TNTHPT, năm 2002)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \in Z^+ \\ x \ge y + 1 \end{cases}$

Giả thiết $\Leftrightarrow \begin{cases} 5C_{x+1}^{y} = 6C_x^{y+1} \\ C_{x+1}^{y} = 3C_x^{y-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5.(x+1)!}{y!(x+1-y)!} = \dfrac{6.x!}{(y+1)!(x-y-1)!} \\ \dfrac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!} = \dfrac{3.x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+1)(y+1) = 6(x+1-y)(x-y) \\ x+1 = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5.3y(y+1) = 6.2y.(2y-1) \\ x+1 = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(y+1) = 4(2y-1) \\ x+1 = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases} \text{(thỏa điều kiện đề bài)}$$

Bài 3. a) Chứng minh rằng

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \quad (1 \le k \le n;\ n, k \in \mathbb{N})$$

b) Giải hệ phương trình:

$$(*) \begin{cases} C_x^y + C_x^{y+1} = C_{x+1}^y \\ C_x^2 + C_{2y}^3 = 165 \end{cases}$$

Giải

a) Ta có: $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

$$= \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}\ \frac{n+1}{k(n+k+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge y+1 \\ y \ge 2 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$

Theo kết quả câu (a), ta có:

Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y \\ C_x^2 + C_{2y}^3 = 165 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!} = \dfrac{(x+1)!}{y!(x-y+1)!} \\ C_x^2 + C_{2y}^3 = 165 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = x-y+1 \\ C_x^2 + C_{2y}^3 = 165 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ C_x^2 + C_{2y}^3 = 165 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ C_x^2 + C_x^3 = 165 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ C_{x+1}^3 = 165 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \dfrac{(x-1)!}{3!(x-2)!} = 165 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ (x-1)x(x+1) = 9.10.11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Bài 4. Giải bất phương trình (với hai ẩn $n, k \in \mathbb{N}$)

$$\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60\,.\,A_{n+3}^{k+2}$$

(Đề thi TNTHPT, năm 2007)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ n \ge k \end{cases}$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{(n+5)!}{(n-k)!} \le 60.\frac{(n+3)!}{(n+1-k)!}$$

$$\Leftrightarrow (n+4)(n+5)(n+1-k) \le 60$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $n \ge 4$ thì

  VT $\ge 8.9.1 = 72 \ge$ VP
- Nếu $n = 3$ thì

  BPT $\Leftrightarrow 7.8(4-k) \le 60$

  $\Leftrightarrow 4 - \dfrac{15}{14} \le k \le 3$ (vì $k \le n = 3$)

  $\Leftrightarrow k = 3$ (vì $k \in \mathbb{N}$)
- Nếu $n = 2$ thì

  BPT $\Leftrightarrow 6.7(3-k) \le 60$

$\Leftrightarrow 3 - k \le \dfrac{10}{7}$

$\Leftrightarrow 3 - \dfrac{10}{7} \le k \le 2$ (vì $k \le n = 2$)

$\Leftrightarrow k = 2$ (vì $k \in \mathbb{N}$)

- Nếu $n = 1$ thì

  BPT $\Leftrightarrow 5.6(2 - k) \le 60$

  $\Leftrightarrow 2 - k \le 2$

  $\Leftrightarrow 0 \le k \le 1$ (vì $k \le n = 1$)

  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right.$ (vì $k \in \mathbb{N}$)

- Nếu $n = 0$ thì

  BPT $\Leftrightarrow 4.5(1 - k) \le 60$

  $\Leftrightarrow 1 - k \le 3$

  $\Leftrightarrow -2 \le k$

  $\Leftrightarrow k = 0$ (vì $0 \le k \le n = 0$)

Vậy nghiệm của BPT là:

$(n, k) \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Bài 5. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn:

$C_n^2 . C_n^{n-2} + 2C_n^2 . C_n^3 + C_n^3 . C_n^{n-3} = 100$, trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử

(Đại học và Cao đẳng (dự bị), khối D, năm 2003)

Giải

Điều kiện: $3 \le n \in \mathbb{N}$

Pt $\Leftrightarrow \left(C_n^2\right)^2 + 2.C_n^2 . C_n^3 + \left(C_n^3\right)^2 = 100$ (vì $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \le k \le n$)

$\Leftrightarrow \left(C_n^2 + C_n^3\right)^2 = 100$

$\Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10$

$\Leftrightarrow C_{n+1}^3 = 10$ (vì $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, $1 \le k \le n$)

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = 10$

$\Leftrightarrow (n + 1)\, n\, (n - 1) = 60$

$\Leftrightarrow (n - 1)\, n\, (n + 1) = 3.4.5$

$\Leftrightarrow n = 4$ (?)

Bài 6. Giải bất phương trình:

$$C_{2x}^{2} + C_{2x}^{4} + \ldots + C_{2x}^{2x} \geq 2^{2003} - 1$$

Giải

Điều kiện: $1 \leq x \in \mathbb{N}$

Ta có: $2^{2x} = (1 + 1)^{2x} + (1 - 1)^{2x}$

$$= \sum_{i=0}^{2x} C_{2x}^{i} + \sum_{i=0}^{2x} (-1)^{i} C_{2x}^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{2x} [1 + (-1)^{i}]\, C_{2x}^{i}$$

$$= 2(C_{2x}^{0} + C_{2x}^{2} + \ldots + C_{2x}^{2x})$$

$$\Rightarrow C_{2x}^{2} + C_{2x}^{4} + \ldots + C_{2x}^{2x} = 2^{2x-1} - 1$$

Do đó: BPT $\Leftrightarrow 2^{2x-1} - 1 \geq 2^{2003} - 1$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \geq 2003$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1002$$

$$\Leftrightarrow x \in \{1002, 1003, \ldots\} = [1002, +\infty) \cap \mathbb{N}$$

Bài 7. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \,.\, 2^{3k} \not\vdots\ 5$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} (1 + x)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{m+1} C_{2n+1}^{k}.x^{k} \\ (1 - x)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{m+1} C_{2n+1}^{k}(-x)^{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}.x^{2k} - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.x^{2k+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + x)^{2n+1}.(1 - x)^{2n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}.x^{2k}\right)^{2} - \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.x^{2k+1}\right)^{2}$$

Với $x = \sqrt{8}$, ta có $A^2 = 8B^2 = -7^{2n+1}$ trong đó

$$\begin{cases} A = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k} \\ B = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k} \end{cases}$$

Vì: $-7^{2n+1} = -1.49^n \equiv \pm 2 \pmod 5$

Do đó: nếu $B \vdots 5$ thì $A^2 \equiv 2 \pmod 5$ (vô lí)

Vậy: $B \not\vdots\ 5$

Bài 8. Cho $2 \le p$ là số nguyên tố, $n \in \mathbb{N}$ và $k \in \{1, 2, ..., p - 2\}$

Chứng minh rằng

a) $C_p^k \vdots p$

b) $n^p - n \vdots p$

(Định lí Feema (nhỏ))

Giải

a) Ta có: $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{1.2...k}$

Vì p là số nguyên tố và $C_p^k \in \mathbb{N}$ nên

$$(p-1)(p-2)...(p-k+1) \vdots 1.2...k$$

$$\Rightarrow C_p^k = p.q \text{ với } q = \frac{(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{1.2...k} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow C_p^k \vdots p$$

b) Đặt: $a_n = n^p - n,\ n \in \mathbb{N}$

- $n = 1$: $a_1 = 0 \vdots p$
- $n = m$: Giả sử $a_m \vdots p$ $(m \in \mathbb{N})$
- $n = m + 1$: Ta có:

$$\begin{aligned} a_{m+1} - a_m &= (m+1)^p - (m+1) - m^p + m \\ &= (m+1)^p - 1 - m^p \\ &= C_p^0 m^p + C_p^1 m^{p-1} + ... + C_p^{p-1} m + C_p^p - 1 - m^p \\ &= C_p^1 m^{p-1} + C_p^2 m^{p-2} + ... + C_p^{p-1} m \text{ (vì } C_p^0 = C_p^p = 1) \end{aligned}$$

Theo câu a) $C_p^k \vdots p,\ \forall k \in \{1, 2, ..., p - 1\}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{m+1} - a_m \vdots p \\ \text{Mà } a_m \vdots p \end{array}\right\} \Rightarrow a_{m+1} \vdots p$$

Vậy với n = m + 1 bài toán đúng, tức là theo nguyên lí quy nạp định lí được chứng minh xong.

Bài 9. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $a + b \geq 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (*)$$

Giải

Không mất tính tổng quát ta có thể xem $a \geq b$

- Nếu $a + b = 0$ thì $a \geq |b| \geq 0$

$$\Rightarrow a^n \geq |b|^n \geq -b^n$$

$$\Rightarrow \frac{a^n + b^n}{2} \geq 0 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

- Nếu $a + b > 0$ thì BĐT (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^n \geq 2$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha)^n + (1 - \alpha))^n \geq 2 \; (**)$$

(với $\frac{2a}{a+b} = 1 + \alpha$ ($\Rightarrow \frac{2b}{a+b} = 1 - \alpha$))

Theo công thức Newton:

$$(1 + \alpha)^n + (1 - \alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\alpha)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [\alpha^k + (-\alpha)^k] = 2(C_n^0 + C_n^2 \alpha^2 + C_n^4 \alpha^4 + \ldots) \geq 2C_n^0 = 2$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha)^n + (1 - \alpha)^n \geq 2$$

$\Rightarrow$ (* *) đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 10. Tìm hệ số của x^{1002} trong khai triển $(x^2 + 1/x^3)^{2001}$

Giải

Số hạng thứ k + 1 (trong khai triển):

$$C_{2001}^k \left(x^2\right)^{2001-k} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{2001}^k \cdot x^{4002-5k}$$

Cho $4002 - 5k = 1002 \Leftrightarrow k = 600$

Vậy hệ số của x^{1002} là C_{2001}^{600}

Bài 11. Tìm số hạng không chứa x, y trong biểu thức $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{12}$ $(x, y \neq 0)$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển:

$$C_{12}^{k}.\left(\frac{x}{y}\right)^{12k}.\left(\frac{y}{x}\right)^{k}=C_{12}^{k}\left(\frac{x}{y}\right)^{12-2k}$$

Số hạng này không phụ thuộc vào x, y $\Leftrightarrow 12-2k=0 \Leftrightarrow k=6$

Vậy số hạng thứ 7 trong khai triển không phụ thuộc vào x, y và có giá trị là $C_{12}^{6}=924$

Bài 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17} \quad (x \neq 0)$$

(Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2000)

Giải

Số hạng tổng quát của khai triển:

$$C_{17}^{k}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}.\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{k} \quad (0 \leq k \leq 17, k \in \mathbb{N})$$

$$=C_{17}^{k}.x^{\frac{3}{4}k+\frac{2k}{3}-\frac{34}{3}}=C_{17}^{k}\,x^{\frac{17k}{12}-\frac{34}{3}}$$

Số hạng này không phụ thuộc vào x $\Leftrightarrow \dfrac{17k}{12}-\dfrac{34}{3}=0$

$\Leftrightarrow k=8$

Vậy số hạng cần tìm là số hạng thứ 9 trong khai triển và có giá trị là C_{17}^{8}

Bài 13. Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 của khai triển nhị thức $\left(x^2\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^{n}$ không bằng 36. Hãy tìm số hạng thứ 7.

Giải

Ta có: $\left(x^2\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n}^{k}.\left(x^2\sqrt{x}\right)^{n-k}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^{k}$

$\Rightarrow$ Số hạng thứ 3 là $T_3 = C_n^2\left(x^2\sqrt{x}\right)^{n-2}.\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^2$

Giả thiết: $C_n^2 = 36$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 36 \Leftrightarrow n(n-1) = 9.8$$

$$\Leftrightarrow n = 9$$

Vậy số hạng thứ 7 của khai triển là:

$$T_7 = C_9^6.\left(x^2\sqrt{x}\right)^{9-6}.\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^6 = C_9^6.\left(x^2\sqrt{x}\right)^3.x^{-4}$$

$$= C_9^6.x^{\frac{7}{2}} = 84x^3\sqrt{x}$$

Bài 14. Trong khai triển nhị thức Newton: $\left(x^3 + \frac{6}{x^2}\right)^n$ có hệ số của số hạng không chứa x bằng 5 lần hệ số của số hạng chứa x^5, tính tổng tất cả các hệ số của khai triển.

Giải

Ta có: $\left(x^3 + \frac{6}{x^2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(x^3\right)^{n-k}.\left(\frac{6}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.6^k.x^{3n-5k}$

- Hệ số của số hạng không chứa x là $C_n^k 6^k$ (với $k = \frac{3n}{5}$)
- Hệ số của số hạng chứa x^5 là $C_n^k.6^k$ (với $k = \frac{3n-5}{5}$)
- Giả thiết suy ra: $C_n^{\frac{3n}{5}}.6^{\frac{3n}{5}} = 5.C_n^{\frac{3n-5}{5}}.6^{\frac{3n-5}{5}}$

$$\Leftrightarrow 6C_n^{\frac{3n}{5}} = 5C_n^{\frac{3n}{5}-1}$$

$$\Leftrightarrow 6.\frac{n!}{\left(\frac{3n}{5}\right)!\left(\frac{2n}{5}\right)!} = 5.\frac{n!}{\left(\frac{3n}{5}-1\right)!\left(\frac{2n}{5}+1\right)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\frac{3n}{5}} = \frac{5}{\frac{2n}{5}+1} \Leftrightarrow 6\left(\frac{2n}{5}+1\right) = 3n$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n}{5} + 2 = n \Leftrightarrow n = 10$$

$$\Rightarrow \left(x^3 + \frac{6}{x^2}\right)^n = \left(x^3 + \frac{6}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.6^k.x^{30-5k}$$

Vậy tổng các hệ số của khai triển là:

$$\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.6^k = \left(1^3 + \frac{6}{1^2}\right)^{10} = 7^{10} \text{ (ứng với } x = 1)$$

Bài 15. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton: $\left(\frac{1}{x^4 + x^7}\right)^n$ $(x \neq 0)$, biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

(Đại học và Cao đẳng, khối A, năm 2006)

Giải

- Ta có: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, $\forall k \in \{0, 1, ..., 2n + 1\}$

nên: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n$

$$= \frac{1}{2}(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n+1} C_{2n+1}^0 \quad 1^i.i^{2n+1-i}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 1)^{2n+1} = \frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1 = 2^{20} - 1$$

$$\Rightarrow n = 10$$

- $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i \left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-i} \left(x^7\right)^i = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i.x^{11i-40}$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{26} là C_{10}^i với $11i - 40 = 26$

$\Leftrightarrow i = 6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$

Bài 16. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của

$$[1 + x^2(1 - x)]^8$$

(Đại học và Cao đẳng, Khối A, năm 2004)

Giải

Ta có: $[1 + x^2 (1 - x)]^8 = C_8^0 + C_8^1 x^2(1 - x)$

$$+ C_8^2x^4(1-x)^2 + C_8^3x^6(1-x)^3 + C_8^4x^8(1-x)^4$$
$$+ C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6$$
$$+ C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8$$

$\Rightarrow$ Số hạng chứa x^8 trong khai triển trên chỉ có trong

$C_8^3x^6(1-x)$ và $C_8^4x^8(1-x)^4$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^8 trong khai triển trên là $3C_8^3 + C_8^4 = 238$

Bài 17. Giả sử có khai triển:

$$(1-x)^n + x(1+x)^{n-1} = a_0 + a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Biết rằng: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 512$. Tính a_1

(Cao đẳng Xây dựng số 2, năm 2005)

Giải

Cho x = 1, ta có: $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow 512 = 2^{n-1}$

$\Leftrightarrow 2^9 = 2^{n-1} \Leftrightarrow n = 10$

$$\Rightarrow (1-x)^{10} + x(1+x)^9 = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i(-x)^i + \sum_{i=0}^{9} x.C_9^i(-x)^i$$
$$= \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i(-x)^i + \sum_{i=0}^{9} C_9^i.x^{i+1}$$

$$\Rightarrow a_3 = C_9^2 - C_{10}^3 = \frac{9.8}{2} - \frac{10.9.8}{6}$$
$$= 36 - 120 = -84$$

Bài 18. Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2006)

Giải

- Số tập con k phần tử của tập hợp A là C_n^k, từ giả thiết suy ra:

$C_n^4 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{20n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow 240 = (n-2)(n-3)$$

$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 16 . 15 \Leftrightarrow n = 18$ (?)

- Do $C_{18}^{k+1} / C_{18}^{k} = \dfrac{18-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < 9$

$$\Rightarrow C_{18}^{1} < C_{18}^{2} < \ldots < C_{18}^{9} \Rightarrow C_{18}^{9} > C_{18}^{10} \ldots > C_{18}^{18}$$

Vậy số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất khi và chỉ khi k = 9.

Bài 19. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C, cần có 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này không phụ thuộc quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

(Đại học và Cao đẳng, khối D, năm 2006)

Giải

- Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^{4} = 495$
- Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

  + Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có một học sinh, số cách chọn là:

$$C_5^2 . C_4^1 . C_3^1 = 120$$

  + Lớp B có 2 học sinh, các lớp C, A mỗi lớp có một học sinh, số cách chọn là:

$$C_5^1 . C_4^2 . C_3^1 = 90$$

  + Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có một học sinh, số cách chọn là:

$$C_5^1 . C_4^1 . C_3^2 = 60$$

- Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là:

$$120 + 90 + 60 = 270$$

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là:

$$495 - 270 = 225$$

Bài 20. Có bao nhiêu số tự nhiêm gồm 3 chữ số khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số lẻ?

(Cao đẳng Kĩ thuật Cao Thắng năm 2006)

Giải

- Số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ $(a \neq 0)$. Khi đó a có 9 cách chọn, b có 9 cách chọn, c có 8 cách chọn.

Vậy có 9.9.8 = 6.48 số gồm 3 chữ số khác nhau.

- $\overline{abc}$ là số lẻ khi $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ nghĩa là c có 5 cách chọn, a có 8 cách chọn, b có 8 cách chọn.

  Vậy có 5.8.8 = 320 số lẻ

Bài 21. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Từ tập E, ta có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau.

(Cao đẳng Kinh tế Kĩ thuật Công nghiệp II)

Giải

Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_3a_4a_5}$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in E)$

+ a_5 được chọn từ tập $\{2, 4, 6\}$ thì có 3 cách chọn.

+ $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là một bộ phận biệt thứ tự được chọn từ $E\setminus\{a_5\}$

Do đó nó là chỉnh hợp chập 4 từ 6 số phần tử nên có A_6^4 cách chọn.

Vậy, ta có $3.A_6^4 = 1080$ (số) thỏa yêu cầu bài trên.

Bài 22. Cho tam giác đều $A_1, A_2 \dots A_n$ $(n \ge 2)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, \dots A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Tìm n.

Giải

- Số tam giác thỏa mãn đề bài là C_{2n}^3
- Cứ 2 đường chéo qua tâm thì có một hình chữ nhật. Suy ra có C_n^2 hình chữ nhật.
- Theo giả thiết $C_{2n}^3 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20.\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow (2n)(2n-1)(2n-2) = 60n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 2n - 1 = 15$$

$$\Leftrightarrow n = 8$$

Bài 23. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2004)

Giải

Chọn đề gồm 5 câu hỏi thỏa yêu cầu bài trên có các trường hợp sau:

+ 2 câu dễ + 1 câu khó + 2 câu trung bình có $C_{15}^2.C_5^1.C_{10}^2$ cách chọn.

+ 2 câu dễ + 2 câu khó + 1 câu trung bình có $C_{15}^2.C_5^2.C_{10}^1$ cách chọn.

+ 3 câu dễ + 1 câu khó + 1 câu trung bình có $C_{15}^3.C_5^1.C_{10}^1$ cách chọn.

Vậy có: $C_{15}^2.C_5^1.C_{10}^2 + C_{15}^2.C_5^2.C_{10}^1 + C_{15}^3.C_5^1.C_{10}^1$

= 56.875 cách chọn thỏa yêu cầu bài trên.

Bài 24. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2005)

Giải

- Số cách chọn 4 nam và 1 nữ đi tỉnh thứ 1:

  $C_{12}^4.3 = 1485$ (cách)

- Số cách chọn 4 nam và 1 nữ đi tỉnh thứ 2:

  $C_8^4.2 = 140$ (cách)

- Số cách chọn 4 nam và 1 nữ đi tỉnh thứ 3:

  $C_4^4.1 = 1$ (cách)

⇒ Số cách chọn theo yêu cầu bài ra là:

1485.140.1 = 207900 (cách)

Bài 25. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có các chữ số khác nhau?

(Cao đẳng Tài chính Kế toán IV, năm 2005)

Giải

- Số có chứa 1 chữ số, có A_5^1 số

- Số có chứa 2 chữ số, có A_5^2 số
- Số có chứa 3 chữ số có A_5^3 số
- Số có chứa 4 chữ số, có A_5^4 số
- Số có chứa 5 chữ số, có A_5^5 số

Vậy có $A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 325$ số thỏa yêu cầu bài trên.

Bài 26. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn?

Giải

Số cách chọn 8 học sinh từ 18 em của đội tuyển là:

$$C_{18}^8 = \frac{18!}{8!10!} = 43758 \text{ cách}$$

Trong 43758 cách chọn bất kì ở trên bao gồm:

* Số cách chọn 8 em sao cho mỗi khối lớp có ít nhất một em

* Số cách chọn 8 em chỉ gồm 2 khối lớp, trường hợp này ta có:

- Số cách chọn 8 học sinh từ khối 12 và khối 11 là C_{13}^8 cách.
- Số cách chọn 8 học sinh từ khối 12 và khối 10 là C_{12}^8 cách.
- Số cách chọn 8 học sinh từ khối 11 và 10 là C_{11}^8 cách.

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là:

$$C_{18}^8 - \left(C_{13}^8 + C_{12}^8 + C_{11}^8\right) = 43758 - 1947 = 41811 \text{ cách}$$

Bài 27. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số có 4 chữ số khác nhau?

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm

Vì $A \vdots 5$ nên $a_4 \in \{0, 5\}$

+ Nếu $a_4 = 0$ thì:

1 cách chọn a_4

9 cách chọn a_1

8 cách chọn a_2

7 cách chọn a_3

$\Rightarrow$ Có 1.9.8.7 = 504 số A

+ Nếu $a_4 = 5$ thì:

1 cách chọn a_4

8 cách chọn a_1

8 cách chọn a_2

7 cách chọn a_3

$\Rightarrow$ Có 1.8.8.7 = 448 số A

Theo quy tắc cộng ta có: 804 + 448 = 952 số A

Bài 28. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Giải

Ta coi cặp (1, 3) là 1 phần tử "kép", khi đó số tự nhiên $A = \overline{a_1a_2...a_6}$ có 5 phần tử 0, 1, (2, 3), 4, 5

- Số hoán vị 5 phần tử này là $P_5 = 5!$
- Trừ đi số trường hợp chữ số 0 ở vị trí a_1 là $P_4 = 4!$ trường hợp và số phần tử kép (2, 3) có thể hoán vị thành (3, 2)
- Do đó, ta có $2(P_5 - P_4) = 2(5! - 4!) = 192$ số A.

Bài 29. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: Sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và mỗi số đó có tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị?

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập.

Điều kiện: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6 - 1 \\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$

Do $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

nên: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 10 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 11 \end{cases}$

Suy ra, ta có các trường hợp sau:

- $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 3, 6\}$ và $\{a_4, a_5, a_6\} = \{2, 4, 5,\}$

  $\Rightarrow$ Có 3! 3! = 36 số A

- $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 4, 5\}$ và $\{a_4, a_5, a_6\} = \{2, 3, 6\}$

  $\Rightarrow$ Có $3!\,3! = 36$ số A
- $\{a_1, a_2, a_3\} = \{2, 3, 5\}$ và $\{a_4, a_5, a_6\} = \{1, 4, 6\}$

  $\Rightarrow$ Có $3!\,3! = 36$ số A

Vậy có $36 + 36 + 36 = 108$ số A

Bài 30. Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Giải

Có 3 trường hợp có thể xảy ra:

- 3 nữ và 3 nam; có $C_7^3C_5^3$ cách chọn
- 2 nữ và 4 nam có $C_7^2C_5^4$ cách chọn
- 1 nữ và 5 nam có $C_7^1C_5^5$ cách chọn

Theo quy tắc cộng, ta có số cách chọn theo yêu cầu bài toán là:

$$C_7^3C_5^3 + C_7^2C_5^4 + C_7^1C_5^5 = 462 \text{ cách}$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm $k \in N$ để $C_7^k, C_7^{k+1}, C_7^{k+2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Đáp số: $k \in \{1, 4\}$

2. Giải bất phương trình:

$$\frac{P_{n+4}}{P_n.P_{n+2}} < \frac{15}{P_{n-2}}$$

Đáp số: $n \in \{3, 4, 5\}$

3. Chứng minh rằng: $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}n\,C_n^n$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k, \ \forall n \geq 2.$$

4. Cho $n \in N^*$ và $a \in [-1; 1]$

Chứng minh rằng

a) $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$

b) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$

c) $2 \leq (1 + a)^n + (1 - a)^n \leq 2^n$

5. Trong khai triển $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ (a, b > 0)

tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

(CĐ Giao thông, năm 2004)

Đáp số: $C_{21}^{12} = 293930$

6. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$

Đáp số: $C_{15}^{5} = 3003$

7. Trong khai triển $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}$ có bao nhiêu số hữu tỉ?

Đáp số: 32 số hạng hữu tỉ

8. Từ chín chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?

Đáp số: 90720 (số)

9. Cho tập A gồm n phần tử, $n \geq 7$. Tìm n, biết rằng số tập con gồm 7 phần tử của A bằng hai lần số tập con gồm 3 phần tử của tập A.

Đáp số: n = 11

10. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm và hàng nghìn bằng 8?

Đáp số: 1440 (số)

11. Một đội văn nghệ có 25 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người biết rằng trong nhóm đó phải có ít nhất 8 nữ?

Đáp số: 3690 (cách)

12. Một lớp học có 20 sinh viên (trong đó có 2 cán bộ lớp). Hỏi có bao nhiêu cách cử người đi dự hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp?

Đáp số: 324 (cách)

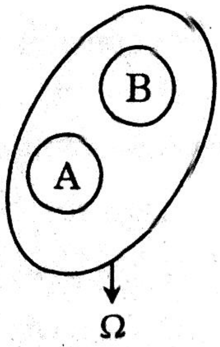
§2. XÁC SUẤT

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Biến cố và xác suất của biến cố:

- *Phép thử ngẫu nhiên* (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà
  + Có thể lặp lại nhiều lần trong các điều kiện giống nhau.
  + Kết quả của nó không dự đoán trước được
  + Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu là Ω
- *Biến cố* là một tập con của *không gian mẫu*, kí hiệu là A, B, C, D, ...
- *Bảng kí hiệu cần nhớ*:

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không thể
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố: "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố: "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau



- *Định nghĩa xác suất của biến cố A*: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$, trong đó

$$\begin{cases} N(A) \text{ là số phần tử của } A \\ N(\Omega) \text{ là số phần tử của } \Omega \\ \Omega \text{ là tập hữu hạn} \end{cases}$$

- *Tính chất*
  + $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$
  + Với mọi biến cố A, ta có $0 \le P(A) \le 1$

+ Nếu các biến cố A và B xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ (công thức cộng)}$$

+ Với mọi biến cố A

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

+ Với mọi biến cố A và B, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (công thức cộng)}$$

2. *Xác suất có điều kiện*

- Giả sử A, B là hai biến cố cùng liên quan với một phép thử. Xác suất của biến cố B được tính trong điều kiện A đã xảy ra được gọi là xác suất của biến cố B với điều kiện A và kí hiệu là $P(B/A)$ (với $P(A) > 0$)

Công thức:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

- *Tính chất:* (công thức nhân xác suất)

  + $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

  + $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập, nếu $p(A \cap B) = P(A).P(B)$

  + Nếu $P(A), P(B) > 0$ thì A và B độc lập

  $$\Leftrightarrow P(B/A) = P(B)$$

  $$\Leftrightarrow P(A/B) = P(A)$$

  + A và B độc lập $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và B độc lập

  $\Leftrightarrow$ A và $\overline{B}$ độc lập

  $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập

3. *Biến ngẫu nhiên*

- Đại lượng ngẫu nhiên (hay còn gọi là biến ngẫu nhiên) là một đại lượng mà giá trị của nó là một số thực phụ thuộc vào kết quả của phép thử kí hiệu là X, Y, Z, ...
- $(X = a)$ là biến cố "biến ngẫu nhiên X nhận giá trị a" và $P(X = a)$ là xác suất của biến cố này.
- Giả sử X là biến ngẫu nhiên và $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, khi đó các tập con $(X = x_1), (X = x_2), \ldots, (X = x_n)$ là các biến cố đôi một xung khắc. Ta đặt

$$P_1 = P(X = x_1), P_2 = P(X = x_2), \ldots, P_n = P(X = x_n)$$

Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_k	...	P_n

trong đó $\begin{cases} P_1, P_2, \ldots, P_n \geq 0 \\ P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1 \end{cases}$

4. *Kì vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên*

Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất là:

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_k	...	P_n

- Kì vọng của X, kí hiệu là E(X), được tính theo công thức:

$$\boxed{E(X) = x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Ý nghĩa: E(X) là một số thực, cho ta ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì vậy kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X

- *Phương sai của X*, kí hiệu là V(X), được tính theo công thức

$$\boxed{\begin{aligned} V(X) &= (x_1 - a)^2P_1 + (x_2 - a)^2P_2 + \ldots + (x_n - a)^2P_n \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2P_i, \text{ trong đó } a = E(X) \end{aligned}}$$

Ý nghĩa: V(X) là một số thực, cho ta ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình E(X)

Tính chất: Trong cùng một phép thử, với X và Y là hai biến ngẫu nhiên bất kì, ta luôn có:

+ $E(C) = C$

+ $E(C.X) = CE(X)$ (với C là hằng số)

+ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

- Độ lệch chuẩn của X, kí hiệu là σ(X), được tính theo công thức

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

3/ BÀI TẬP

Bài 1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để:

a) Số được chọn là số nguyên tố

b) Số được chọn là số chia hết cho 3

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(\Rightarrow N(\Omega) = 8)$

a) Gọi A là biến cố đã được chọn là số nguyên tố

Khi đó: $A = \{2, 3, 5, 7\}$

Do đó: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

b) Gọi B là biến cố để được chọn là số nguyên dương chia hết cho 3.

Khi đó: $B = \{3, 6\}$

Do đó: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Bài 2. Xếp ngẫu nhiên 5 người A, B, C, D, E vào một bàn dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất để cho.

a) A và B ngồi đầu bàn

b) A và B ngồi cạnh nhau

Giải

Xếp 5 người vào 5 chỗ ngồi là một hoán vị của 5 phần tử. Do đó, số khả năng có thể xảy ra là

$N(\Omega) = 5! = 120$

a) Gọi U là biến cố A, B ngồi đầu bàn

Ta có: + Xếp A, B ngồi đầu bàn có 2 cách

+ Xếp 3 người còn lại vào 3 chỗ còn lại, có $3! = 6$ cách

Suy ra $N(U) = 2 \times 6 = 12$

Vậy $P(U) = \dfrac{N(U)}{N(\Omega)} = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$

b) Gọi V là biến cố A, B ngồi cạnh nhau

Ta có: + Xếp A, B cạnh nhau, có 2 cách

+ Xếp AB (hoặc BA), C, D, E, có $4! = 24$ cách

Suy ra $N(V) = 2 \times 24 = 48$

Vậy $P(V) = \dfrac{N(V)}{N(\Omega)} = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5}$

Bài 3. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Xuất hiện mặt chẵn"

b) B: "Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3"

c) C: "Xuất hiện mặt có số chấm không nhỏ hơn 3"

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gồm sáu kết quả đồng khả năng xuất hiện.

a) Ta có: $A = \{2, 4, 6\}$

Do đó: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

b) Ta có: $B = \{3, 6\}$

Do đó: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

c) Ta có: $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Do đó: $P(C) = \dfrac{N(C)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Bài 4. Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:

a) Cả hai quả đều đỏ

b) Hai quả cùng màu

c) Hai quả khác màu

Giải

Gọi A là biến cố "quả cầu lấy từ hộp thứ nhất là màu đỏ"

B là biến cố "quả cầu lấy từ hộp thứ hai là màu đỏ"

Rõ ràng A, B độc lập

a) Xác suất của $A \cap B$ là:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{5}.\frac{4}{10} = \frac{6}{25}$$

b) Xác suất của $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ là

$$P(C) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$= P(A).P(B) + P(\overline{A}).P(\overline{B})$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{4}{10} + \frac{2}{5}.\frac{6}{10} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25}$$

$$= \frac{12}{25}$$

c) Xác suất của $\overline{C}$ là:

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

Bài 5. Gieo con súc sắc hai lần liên tiếp. Kí hiệu:

A: "Lần đầu tiên xuất hiện mặt chẵn"

B: "Lần thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm"

Chứng minh: A và B độc lập nhau

Giải

Kí hiệu (i, j) là kết quả: Lần đầu xuất hiện mặt i chấm lần thứ hai xuất hiện mặt j chấm. Khi đó

$$\Omega = (i, j) / 1 \le i, j \le 6\}$$

Gồm 36 kết quả đồng khả năng. Ngoài ra, ta có:

$$\begin{cases} A = \{(i, j) / i \in \{2, 4, 6\}\ 1 \le i, j \le 6\} \\ B = \{(i, 6\} / 1 \le i \le 6\} \\ A \cap B = \{(2, 6), (4, 6), (6, 6)\} \end{cases}$$

Do đó $\begin{cases} N(A) = 3.6 = 18 \\ N(B) = 6 \\ N(A \cap B) = 3 \end{cases}$

Nên: $\begin{cases} P(A) = N(A) / N(\Omega) = 18/36 = \dfrac{1}{2} \\ P(B) = N(B) / N(\Omega) = 6/36 = \dfrac{1}{6} \\ P(A \cap B) = N(A \cap B) / N(\Omega) = 3/36 = \dfrac{1}{12} \end{cases}$

Vậy: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, tức là A và B độc lập nhau.

Bài 6. Gieo đồng thời hai con súc sắc, một con màu đỏ và một con màu xanh. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: “Con đỏ xuất hiện mặt 6 chấm”

B: “Con xanh xuất hiện mặt 6 chấm”

C: “Ít nhất một con xuất hiện mặt 6 chấm”

D: “Không có con nào xuất hiện mặt 6 chấm”

E: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con bằng 8”

Giải

Ta có $\Omega = (\{a, b\} / 1 \le a, b \le b)$, trong đó a là số chấm trên con đỏ, b là số chấm trên con xanh. Như vậy, Ω gồm 36 kết quả đầy khả năng

$$\text{và} \begin{cases} A = \{(6, b) / 1 \le b \le 6\}, N(A) = 6 \\ B = \{(a, b) / 1 \le a \le b\}, N(B) = 6 \\ A \cap B = \{(6, 6)\}, N(A \cap B) = 1 \\ E = \{(2, 0), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}, \\ \quad N(E) = 5 \end{cases}$$

b a	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Từ đó, suy ra:

- $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
- $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

  $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{36}$
- $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

- $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$
- $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{36}$

Bài 7. Bộ bài có 52 con, trong đó có 4 lá ách, lấy ngẫu nhiên 3 lá. Tính xác suất để cho nó có:

a) Một lá ách

b) Hai lá ách

Giải

Ta có: $N(\Omega) = C_{52}^3 = 22100$

a) Gọi A là biến cố có 1 lá ách

Khi đó: $N(A) = C_4^1.C_{48}^2 = 4.1128 = 4512$

Vậy xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4512}{22100} = \frac{1128}{5525}$$

b) Gọi B là biến cố có 2 lá ách

Khi đó $N(B) = C_4^2.C_{48}^1 = 6.48 = 288$

Vậy xác suất cần tìm là:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{288}{22100} = \frac{72}{5525}$$

Bài 8. Cho biến ngẫu nhiên X với bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

a) Lập bảng phân phối xác suất của X^2

b) Tính $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^2 + 2X - 5)$

Giải

a) Vì $X \geq 0$ nên $(X = k) = (X^2 = k^2)$ với $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Do đó $P(X = k) = P(X^2 = k^2)$

Từ đó, ta có bảng phân phối xác suất của X^2 là:

X^2	0^2	1^2	2^2	3^2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

b) Ta có:

- $E(X) = \sum_{i=2}^{n} x_i P_i = 0.\frac{1}{6} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{5} + 3.\frac{2}{15} = 1{,}3$
- $E(X^2) = 0^2.\frac{1}{6} + 1^2.\frac{1}{2} + 2^2.\frac{1}{5} + 3^2.\frac{2}{15} = 2{,}5$
- $E(X^2 + 2X - 5) = E(X^2) + 2E(X) - 5 = 2{,}5 + 2{,}6 - 5 = 0{,}1$

Bài 9. Cho ba biến ngẫu nhiên X, Y, Z lần lượt có bảng phân phối xác suất như sau:

X	–5	$\frac{10}{3}$
P	0,4	0,6

Y	0
P	1

Z	–100	100
P	0,5	0,5

a) Tính E(X), E(Y), E(Z)
b) Tính V(X), V(Y), V(Z)
c) Tính σ(X), σ(Y), σ(Z)

Giải

Ta có:

$$a)\ \begin{cases} E(X) = (-5).0{,}4 + \frac{10}{3}.(0{,}6) = 0 \\ E(Y) = 0{,}1 = 0 \\ E(Z) = -100.(0{,}5) + 100(0{,}5) = 0 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} V(X) = (-5-0)^2.(0{,}4) + (\frac{10}{3} - 0)^2.(0{,}6) = \frac{50}{3} \\ V(Y) = (0-0)^2.1 = 0 \\ V(Z) = (-100-0)^2(0{,}5) + (100-0)^2(0{,}5 \\ \quad = 10000 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{50}{3}} \\ \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 0 \\ \sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{10000} = 100 \end{cases}$$

Bài 10. Cho $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{9}$, $P(A/B) = \frac{1}{2}$

Tính $P(\overline{A} \cap B)$ và $P(B\backslash \overline{A})$

Giải

Ta có:

- $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}/B).P(B) = [1 - P(A/B)]P(B)$

$$= (1 - \frac{1}{2}).\frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

- $$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$$

(vì $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$)

Bài 11. Cho bảng phân phối xác suất sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

Tìm kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn

Giải

Ta có:

- $E(X) = 0 \times (0{,}3) + 1 \times (0{,}2) + 2 \times (0{,}15) + 3 \times (0{,}15) + 4 \times (0{,}1)$
$+ 5 \times (0{,}1) = 1{,}85$
- $V(X) = (1{,}85 - 0)^2 \times (0{,}3) + (1{,}85 - 1)^2 \times (0{,}2)$
$+ (1{,}85 - 2)^2 \times (0{,}15) + (1{,}85 - 3)^2 \times (0{,}15)$
$+ (1{,}85 - 4)^2 \times (0{,}1) + (1{,}85 - 5)^2 \times (0{,}1)$
$= 2{,}827 \approx 2{,}83$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}83} \approx 1{,}68$

Bài 12. Một hộp chứa 2 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Rút lần lượt từng quả (không hoàn lại). X là số lần rút tối thiểu sao cho cả hai quả cầu đỏ đều được rút.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X

b) Tính E(X), V(X) và σ(X)

Giải

a) Ta có: $X \in \{2, 3, 4\}$

- $P(x = 2) = \frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(x = 3) = \frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} + \frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

(Vì x = 3, ta có 2 trường hợp

$$+ \textit{Trường hợp 1:} \left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ lần rút 1: quả cầu xanh}\\ \bullet \text{ lần rút 2: quả cầu đỏ}\\ \bullet \text{ lần rút 3: quả cầu đỏ}\end{array}\right.$$

$$+ \textit{Trường hợp 2:} \left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ lần rút 1: quả cầu đỏ}\\ \bullet \text{ lần rút 2: quả cầu xanh}\\ \bullet \text{ lần rút 3: quả cầu đỏ)}\end{array}\right.$$

- Tính tương tự $P(X = 4 = \frac{1}{2})$

Do đó, bảng phân phối xác suất của X là:

X	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) • $E(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$

- $V(X) = (2 - \frac{10}{3})^2 \times \frac{1}{6} + (3 - \frac{10}{3})^2 \times \frac{1}{3}$

$$+ (4 - \frac{10}{3})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{16}{9} \times \frac{1}{6}$$

$$+ \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Bài 13. Một tổ có 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên ba bạn, kí hiệu X là số bạn nam trong ba bạn được chọn. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) $(x \geq 1)$

b) $(1 \leq x < 2)$

Giải

a) $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = 1 - \dfrac{4}{120} = \dfrac{116}{120} = \dfrac{29}{30}$

b) $P(1 \leq x < 2) = P(x = 1) = \dfrac{C_6^1.C_4^2}{C_{10}^3} = \dfrac{6.6}{120} = \dfrac{3}{10}$

Bài 14. Một bình đựng 10 viên bi khác nhau về màu, trong đó có 7 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ

a) Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tính xác suất để lấy được viên bi xanh.

b) Lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi, rồi lại lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi nữa. Tính xác suất để được 1 viên bi xanh ở lần lấy thứ nhất và một viên bi đỏ ở lần thứ hai.

Giải

a) + Số cách lấy ra 3 viên bi là C_{10}^3

+ Số cách xuất hiện 2 bi xanh và 1 bi đỏ là $C_7^2.C_3^1$

+ Xác suất cần tìm $P = \dfrac{C_7^2.C_3^1}{C_{10}^3} = \dfrac{21}{40}$

b) Ta xét 2 trường hợp

+ Lần thứ nhất lấy không hoàn lại

Gọi A là biến cố lần thứ nhất lấy được bi xanh và B là biến cố lần thứ hai lấy được bi đỏ.

Khi đó, xác suất cần tìm là $P = P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

$$= \frac{7}{10}.\frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

+ Lần thứ hai có hoàn lại:

Khi đó hai biến cố A và B độc lập nhau nên xác suất cần tìm là

$$P = P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{7}{10}.\frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

Bài 15. Một túi chứa 10 tấm thẻ màu đỏ và 6 tấm thẻ màu xanh. Chọn ngẫu nhiên ra 3 tấm thẻ. Gọi X là số thẻ màu đỏ.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X

b) Tính E(X), V(X) và σ(X)

Giải

a) Ta có: $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Khi đó: $P(X = 0) = \dfrac{C_6^3}{C_{16}^3} = \dfrac{2}{50}$

$$P(X = 1) = \frac{C_{10}^2.C_6^2}{C_{16}^3} = \frac{15}{56}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_{10}^2.C_6^1}{C_{16}^3} = \frac{27}{56}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{12}{56}$$

Do đó, bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{12}{56}$

b) $E(X) = 0 \times \dfrac{2}{56} + 1 \times \dfrac{15}{56} + 2 \times \dfrac{27}{56} + 3 \times \dfrac{12}{56} = 1{,}875$

$$V(X) = (0 - 1{,}875)^2 \times \frac{2}{56} + (1 - 1{,}875)^2 \times \frac{15}{56}$$
$$+ (2 - 1{,}875)^2 \times \frac{27}{56} + (3 - 1{,}875)^2 \times \frac{12}{56} = \frac{39}{64} = 0{,}609375$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{39}}{8} \approx 0{,}7806$$

Bài 16. Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền. Mỗi người sút 1 lần với xác suất ghi bàn là 0,8 và 0,7. Tính xác suất để ít nhất một cầu thủ ghi bàn.

Giải

Gọi A là xác suất cầu thủ 1 ghi bàn

B là xác suất cầu thủ 2 ghi bàn

Khi đó:

- $P(A) = 0$, $P(B) = 0{,}7$
- Xác suất để cả hai cầu thủ cùng ghi bàn là:

  $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}5$

  (Vì A, B đối lập nhau)
- Xác suất để ít nhất một cầu thủ ghi bàn là

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$

Bài 17. Hai người đi săn bắn một con thỏ cùng một lúc. Xác suất để người thứ nhất bắn trúng đích là $\frac{1}{3}$, xác suất để người thứ 2 bắn trúng đích là $\frac{1}{5}$. Tính xác suất để con thỏ bị bắn trúng.

Giải

Cách 1:

Gọi A là biến cố: "người thứ nhất bắn trúng con thỏ"
B là biến cố: "người thứ hai bắn trúng con thỏ"

Suy ra:
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}) \text{ (vì A, B độc lập)} \\ &= 1 - (1 - P(A).(1 - P(B)) \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) \\ &= 1 - \frac{2}{3}.\frac{4}{5} = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Cách 2:

- Xác suất để người thứ nhất bắn không trúng đích là $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- Xác suất để người thứ hai bắn không trúng đích là $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
- Xác suất để cả hai người bắn không trúng đích là $\frac{2}{3}.\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$
- Do đó xác suất để con thỏ bị bắn trúng là

$$1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

Bài 18. Cho X là biến ngẫu nhiên lấy giá trị từ 0 đến 6 và

$$P(X = k) = \frac{1}{4} - \frac{|3 - k|}{16}, \, k \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$$

Hãy tính E(X), V(X) và σ(X)

Giải

Ta có bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Khi đó:

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{16} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{16} = 3$$

$$V(X) = (0-3)^2 \times \frac{1}{16} + (1-3)^2 \times \frac{1}{8} + (2-3)^2 \times \frac{3}{16} + (3-3)^2 \times \frac{1}{4} + (4-3)^2 \times \frac{3}{16} + (5-3)^2 \times \frac{1}{8} + (6-3)^2 \times \frac{1}{16}$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{4}{8} + \frac{3}{16} + 0 + \frac{3}{36} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} = 2,5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 5/\sqrt{10}$$

Bài 19. Gieo liên tiếp ba lần một con súc sắc. Tìm xác suất của biến cố mà tổng số chấm không nhỏ hơn 16

Giải

- Số trường hợp có thể xảy ra là: 6.6.6 = 216
- Số trường hợp thuận lợi
  - + Tổng số chấm bằng 18: 1 trường hợp (6, 6, 6)
  - + Tổng số chấm bằng 17: 3 trường hợp (5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 6)
  - + Tổng số chấm bằng 16: 6 trường hợp (6, 6, 4), (6, 4, 6), (4, 6, 6), (6, 5, 5), (5, 6, 5), (5, 5, 6)

⇒ Tổng cộng có 10 trường hợp thuận lợi

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

Bài 20. Kết quả (b, c) của việc gieo súc sắc cân đối, đồng chất trong đó b là số chấm xuất hiện trong lần gieo đầu, c là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ hai, được thay vào phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$. Tính xác suất để

a) Phương trình vô nghiệm

b) Phương trình có nghiệm kép

c) Phương trình có nghiệm

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{(b, c) / 1 \le b, c \le 6\}$ có 36 phần tử

a) Gọi A là biến cố phương trình vô nghiệm

Khi đó: $A = \{(b, c) \in \Omega / b^2 - 4c < 0\}$

$= \{(b, c) \in \Omega \,/\, b^2 < 4c\}$

$= \{(1, 1), ..., (1, 6), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 3), ..., (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$

$\Rightarrow N(A) = 6 + 5 + 4 + 2 = 17 \Rightarrow P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{17}{36}$

b) Gọi B là biến cố phương trình có nghiệm kép

Khi đó $B = \{(b, c) \in \Omega \,/\, b^2 - 4c = 0\}$

$= \{(b, c) \in \Omega \,/\, b^2 = 4c\}$

$= \{(2, 1), (4, 4)\}$

$\Rightarrow N(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

c) Gọi C là biến cố phương trình có nghiệm

Khi đó $P(C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 19/36$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của hai súc sắc đó không vượt quá 5.

Đáp số: $P = \dfrac{5}{18}$

2. Gieo hai con súc sắc cân đối và đồng chất

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7”. Liệt kê các kết quả thuận lợi của A. Tính P(A).

Đáp số: a) $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)\}$

b) $P(A) = \dfrac{7}{12}$

3. Trong một hộp có 12 bóng đèn giống nhau, trong đó có 4 bóng hỏng, lấy ngẫu nhiên ra 3 bóng. Tính xác suất để

a) Được 2 bóng tắt

b) Được 3 bóng hỏng

c) Được ít nhất 1 bóng tắt

Đáp số: a) $P(A) \simeq 25{,}45\%$

b) $P(B) \simeq 1{,}82\%$

c) $P(C) \simeq 98{,}18\%$

4. Biết xác suất để một học sinh đậu ở lần thi thứ nhất, thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Tính xác suất để học sinh ấy thi đậu trong kì thi, biết rằng mỗi học sinh được phép thi tối đa hai lần.

Đáp số: $P = 0,96$

5. Một gia đình có nuôi 3 con gà, đánh số thứ tự là 1, 2, 3. Xác suất đẻ trứng của 3 con gà 1, 2, 3 tương ứng là 0,6; 0,5 và 0,8. Gọi X là số trứng thu được trong ngày, lập bảng phân phối xác suất của X.

Đáp số: Bảng phân phối xác suất của X

X	0	1	2	3
P	0,04	0,26	0,46	0,24

6. Cho bảng phân phối xác suất sau

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn

Đáp số: $\begin{cases} E(X) = 1,5;\ V(X) = 0,75; \\ \sigma(X) \simeq 0,87 \end{cases}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Giải các phương trình:

a) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

b) $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$

Đáp số:

a) A. $x = 6$ B. $x = 7$ C. $x = 8$ D. $x = 9$

b) A. $x = 23$ B. $x = 19$ C. $x = 21$ D. $x = 17$

2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ $(x > 0)$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n + 3)$

Đáp số:

A. 495 B. 491 C. 595 D. 941

3. Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ. Cần lấy ra một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Đáp số:

A. 940 cách chọn B. 740 cách chọn
C. 840 cách chọn D. 745 cách chọn

4. Có bao nhiêu cách xếp 3 học sinh nam, 4 học sinh nữ ngồi trên một dãy ghế đài sao cho học sinh cùng phái ngồi gần nhau

Đáp số:

A. 268 cách B. 278 cách
C. 288 cách D. 298 cách

5. Với 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 5?

Đáp số:

A. 5160 B. 1560 C. 6051 D. 1650

6. Cho hai biến cố A, B có P(A) = 0,6; P(B) = 0,3; $P(A \cap B) = 0{,}2$. Hãy tính $P(\overline{A}/\overline{B})$

Đáp số:

A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{3}{7}$

7. Xác suất sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho sau khi sinh 2 lần thì có ít nhất một con trai (xét mỗi lần sinh 1 con)

Đáp số:

A. 0,7596 B. 0,7597 C. 0,7599 D. 0,7598

8. Từ một hộp chứa 5 bi đỏ, 3 bi xanh lấy ngẫu nhiên 3 bi. Gọi X là số bi đỏ trong 3 bi được lấy. Tính kì vọng của X

Đáp số:

A. $E(X) = \frac{15}{8}$ B. $E(X) = \frac{19}{4}$
C. $E(X) = \frac{17}{4}$ D. $E(X) = \frac{21}{9}$

9. Hai xạ thủ độc lập nhau bắn vào một bia, mỗi người bắn một viên đạn. Xác suất bắn trúng bia bởi một viên của xạ thủ nhất, thứ hai lần lượt là 0,7 và 0,8. Tính kì vọng và phương sai của số viên trúng bia.

Đáp số:

A. $\begin{cases} E(X) = 3{,}7 \\ V(X) = 1{,}5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} E(X) = 0{,}37 \\ V(X) = 1{,}5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} E(X) = 1{,}5 \\ V(X) = 0{,}37 \end{cases}$ D. $\begin{cases} E(X) = 5{,}1 \\ V(X) = 3{,}70 \end{cases}$

10. Trong một hộp có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi cùng 1 lúc. Tính xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng 2 viên bi màu đỏ.

Đáp số:

A. $P = \frac{18}{39}$ B. $P = \frac{35}{18}$ C. $P = \frac{18}{37}$ D. $P = \frac{18}{35}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. a) Chọn B.

Điều kiện: $3 \le x \le \mathbb{N}$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + 6.\frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{6x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 9x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow 1 + 3(x-1) + (x^2 - 3x + 2) = 9x - 14$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (loại)} \\ x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7$

b) Chọn D.

Điều kiện: $-3 \le x \in \mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{(x+8)!}{5!(x+3)!} = 5\frac{(x+6)!}{(x+3)!}$

$\Leftrightarrow (x+7)(x+8) = 5.5! = 600$

$\Leftrightarrow x^2 + 15x - 544 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17 \\ x = -32 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 17$

2. Chọn A.

Ta có: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!.3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 7(n+3)$$

$\Leftrightarrow 3(n+2) = 42 \quad \Leftrightarrow n + 2 = 14 \quad \Leftrightarrow n = 12$

$\Rightarrow$ Số hạng tổng quát trong khai triển là:

$$C_{12}^{k} x^{-3k}.x^{\frac{5}{2}(12-k)} = C_{12}^{k} x^{30-\frac{11k}{2}}$$

Khi đó $30 - \dfrac{11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_k^4 = 495$

3. Chọn C.

Chọn một nhóm 5 người (có 3 nam, 2 nữ) nên có C_6^2 cách chọn nữ, C_8^3 cách chọn nam.

Vậy có tất cả $C_6^2.C_8^3 = \dfrac{6!}{2!4!}.\dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{5.6.6.7.8}{12} = 840$ cách chọn

4. Chọn C.

- Có 2! cách sắp xếp 2 phái với nhau
- Sau đó: + Có 3! cách sắp xếp 3 nam với nhau
  + Có 4! cách sắp xếp 4 nữ với nhau

Vậy có tất cả: 2!.3!.4! = 288 cách sắp xếp

5. Chọn B.

+ Ta sẽ lập được một số như vậy bằng cách lấy chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 6, rồi chen chữ số 5 vào một vị trí bất kì, vì vậy có $5A_6^4$ số như thế này

+ Nhưng chúng ta loại bỏ các số bắt đầu bằng chữ số 0. Chỉnh hợp chập 3 từ 5 phân tử 1, 2, 3, 4, 6 rồi chen chữ số 5 vào một vị trí bất kì và chữ số đặt phía trước các chữ số đó, vì vậy có $4.\ A_5^3$ số như thế này.

Suy ra có $5A_6^4 - 4A_5^3 = 5.\dfrac{6!}{2!} - 4.\dfrac{5!}{2!}$

$= 25.6.4.3 - 240 = 1800 - 240 = 1560$

6. Chọn D.

Ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,2 = 0,7$

$\Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$

$$\Rightarrow P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}3} = \frac{3}{7}$$

7. Chọn C.

Gọi A là biến cố sinh con gái lần 1

B là biến cố sinh con gái lần 2

Khi đó: • $P(A) = P(B) = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$

• Xác suất để 2 lần sinh đều là con gái:

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = (0{,}49)^2 = 0{,}2401$

Vậy xác suất để sinh 2 lần có ít nhất 1 con trai là

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2401 = 0{,}7599$$

8. Chọn A.

Ta có: $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

Khi đó: $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) + 3.P(X = 3)$

$$= \frac{C_5^1.C_3^2}{C_8^3} + \frac{2C_5^2.C_3^1}{C_8^3} + \frac{3.C_5^3}{C_8^3}$$

$$= \frac{15 + 60 + 30}{50} = \frac{105}{50} = \frac{15}{8}$$

9. Chọn C.

Gọi X là số viên đạn trúng bia ($\Rightarrow X \in \{0, 1, 2\}$)

Ta có: $P(X = 0) = (0{,}3) \times (0{,}2) = 0{,}06$

$P(X = 2) = (0{,}7) \times (0{,}2) + (0{,}8) \times (0{,}3) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$

$P(X = 2) = (0{,}7) \times (0{,}8) = 0{,}56$

Ta có bảng phân phối xác suất

X	0	1	2
P	0,06	0,38	0,56

Suy ra

- $E(X) = 0 \times (0{,}06) + 1 \times (0{,}38) + 2 \times (0{,}56) = 0{,}38 + 1{,}12 = 1{,}5$
- $V(X) = (0 - 1{,}5)^2 \times (0{,}06) + (1 - 1{,}5)^2 \times (0{,}38)$
  $+ (2 - 1{,}5)^2 \times (0{,}56) = 0{,}37$

10. Chọn D.

- Trong hộp có 7 viên bi, lấy ngẫu nhiên 3 viên bi một lúc nên ta có không gian mẫu Ω có $C_7^3 = 35$ phần tử
- Trong 3 bi lấy ra có đúng 2 bi đỏ, nghĩa là ta lấy được 2 bi đỏ và 1 bi xanh nên ta có $C_4^2.C_3^1 = 18$ trường hợp
- Vậy xác suất để lấy được đúng 2 viên bi màu đỏ là $P = \dfrac{18}{35}$

Chương III

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để chứng minh mệnh đề P(n) phụ thuộc vào $n \in \mathbb{N}$, đúng $\forall n \geq n_0$ (n_0 hằng số $\in \mathbb{N}$), ta thực hiện ba bước sau:

- *Bước 1:* $n = n_0$: Chứng minh P(n) đúng
- *Bước 2:* $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$): Giải P(k) đúng
- *Bước 3:* $n = k + 1$: Chứng minh P(k + 1) đúng

Nguyên lí quy nạp cho phép ta kết luận P(n) đúng $\forall n \geq n_0$.

Đặc biệt khi $n_0 = 1$ thì ta kết luận P(n) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$)

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ **(1)**

Từ đó suy ra kết quả $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 2008^3 \vdots 20180400$

Giải

- $n = 1$: Ta có: $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ (đẳng thức luôn đúng)
- $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$) Giả sử (1) đúng, tức là có:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

- $n = k + 1$: Ta có:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + ... + k^3} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$ (do giả thiết quy nạp (bước 2))

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$\Rightarrow$ Công thức (1) đúng, khi $n = k + 1$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng

Từ đó suy ra:

$$S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 2008^3 = 8(1^3 + 2^3 + \ldots + 1004^3)$$

$$= 8.\frac{1004^2.1005^2}{4} = 2 \times (1004 \times 1005)^2$$

$$= 2 \times 1009020^2 \vdots 20180400$$

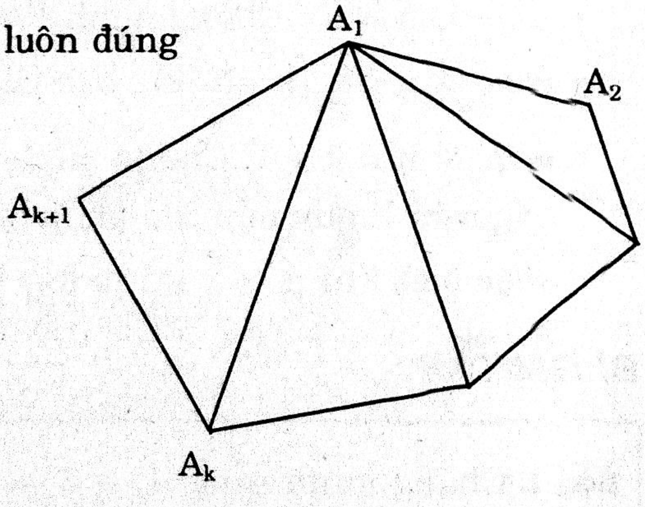
Bài 2. Chứng minh rằng đa giác lồi n cạnh ($n \geq 4$) có thể chia thành $n - 2$ tam giác bằng có đường chéo không cắt nhau.

Giải

Bước 1: $n = 4$: Bài toán trên luôn đúng

Bước 2: $n = k$ ($4 \leq k \in \mathbb{N}$):

Giả sử bài toán trên đúng, tức là một đa giác lồi k cạnh được chia thành $k - 2$ tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau (giả thiết quy nạp)



Bước 3: $n = k + 1$

Xét đa giác lồi $k + 1$ cạnh, nối A_1 với A_k, ta được tam giác $A_1A_kA_{k+1}$ và đa giác lồi k cạnh $A_1A_2\ldots A_k$.

Theo giả thiết quy nạp ta có thể chia đa giác k cạnh $A_1A_2\ldots A_k$ (bởi các đường chéo không cắt nhau) thành $k - 2$ tam giác. Cùng với tam giác $A_1A_kA_{k+1}$ ta được số tam giác tạo thành là:

$$(k - 2) + 1 = k - 1.$$

Như vậy bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Chứng minh rằng:

$$n^n > (n + 1)^{n-1}, \forall 2 \leq n \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

Giải

- $n = 2$: Ta có: $2^2 > 3^1 \Rightarrow$ (1) đúng với $n = 2$
- $n = k$ ($2 \leq k \in \mathbb{Z}$): Giả sử $k^k > (k + 1)^{k-1}$

- $n = k + 1$: Ta có

$$k^k(k+1)^{k+1} > (k+1)^{k-1}.(k+1)^{k+1} \geq (k+1)^{2k} \geq (k(k+2)+1)^k$$
$$> k^k(k+2)^k$$

$\Rightarrow (k+1)^{k+1} > (k+2)^k \Rightarrow$ (1) đúng với $n = k + 1$

$\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 4. Cho hàm số $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ thỏa

a) $\dfrac{f(x+y)}{2} \leq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, $\forall x, y \in (a, b)$

Chứng minh rằng: $\dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$,

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b), \forall n \in \mathbb{N}$

b) Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

- $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$
- $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$
- $\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Giải

a) - $n \in \{1, 2\}$: BĐT luôn đúng

- $n = k$ ($2 \leq k \in \mathbb{N}$): Giả sử BĐT đúng, tức là:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)}{k} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right)$$

Đặt $S = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}$

Ta có: $\sum\limits_{i=1}^{k+1} f(x_i) + (k-1)f(S) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i) + [f(x_{k+1}) + (k+1)f(S)]$

$$\leq kf\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) + kf\left(\frac{x_{k+1} + (k-1)S}{k}\right)$$

$$\le 2kf\left(\frac{\dfrac{x_1+\ldots+x_k}{k}+\dfrac{x_{k+1}+(k-1)S}{k}}{2}\right)=2kf(S)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \le (k+1)f(S)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{k+1})}{k+1} \le f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp BĐT đã cho được chứng minh xong.

b) • Ta có: $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \le 2\sin\frac{A+B}{2}$

(Để ý: $\sin\frac{A+B}{2} > 0,\ \cos\frac{A-B}{2} \le 1$)

$$\Rightarrow \frac{\sin A+\sin B}{2} \le \sin\frac{A+B}{2}.$$

Theo câu a: $\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

• $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \le 2\cos\frac{A+B}{2}$

(Để ý: $\cos\frac{A+B}{2} > 0,\ \cos\frac{A-B}{2} \le 1$)

$$\Rightarrow \frac{\cos A+\cos B}{2} \le \cos\frac{A+B}{2}$$

Theo câu a: $\cos A + \cos B + \cos C \le 3\cos\frac{A+B+C}{3} = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

• Chứng minh tương tự:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Do đó theo BĐT Cauchy:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \le \left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ cùng dấu và lớn hơn -1 $(n \geq 2)$. Chứng minh rằng: $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

(BĐT Daniel Bernoulli (nhà toán học Thụy Sĩ (1700 – 1782))

Giải

- $n = 2$: Ta có: $(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + (a_1 + a_2) + a_1.a_2 \geq 1 + (a_1 + a_2)$
  $\Rightarrow$ BDDT đúng với $n = 2$
- $n = k$ $(2 \leq k \in \mathbb{N})$: Giả sử BĐT đúng, tức là:
  $$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k) \geq 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$
- $n = k + 1$: Ta có:

$$\underbrace{(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_k)}(1 + a_{k+1})$$
$$\geq [1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)](1 + a_{k+1})$$
$$\geq 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}) + (a_1 + a_2 + \dots + a_k)a_{k+1}$$
$$\geq 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1})$$

$\Rightarrow$ BĐT đúng với $n = k + 1$

Từ đó ta có điều phải chứng minh

Chú ý: với $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a > -1$, ta có: $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Đây chỉ là trường hợp đặc biệt của BĐT Bernoulli. Tuy nhiên, đa số các sách phổ thông thường trình bày bất đẳng thức Bernoulli dưới dạng này.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Chứng minh rằng: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Từ đó suy ra kết quả của $\Sigma = 2^2 + 4^2 + \dots + 2008^2$

2. Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng: $b^{2n} + c^{2n} \leq a^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(Học viện Quân y Hà Nội)

3. Chứng minh rằng

a) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \,\vdots\, 24$, $\forall x \in \mathbb{N}$

b) $n^{11} - n \,\vdots\, 11$, $\forall n \in \mathbb{N}$

4. Cho $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

5. Cho a + b = 2008. Chứng minh rằng. $a^n + b^n \geq (1004.\sqrt[n]{2})^n$,

$\forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$

6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^2 x + \cos^2 2x + ... + \cos^2 nx = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin nx.\cos(n+1)x}{2\sin x}$,

$\forall x \in (0, \pi), \forall n \in \mathbb{N}$

b) $a^n + b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall a,b \in \mathbb{R}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$

7. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2....a_n} + \sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}$

$\forall a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$

(BĐT Minkowski)

b) $(1 + a)^n \geq 2n^2, \forall a \geq 2, \forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$

§2. DÃY SỐ

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Dãy số là hàm số $f: \ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto f(n)$

Ta thường ghi: $x_n = f(n)$

Kí hiệu: $\{x_n\}$

Sau đây là một số ví dụ về dãy số:

- Dãy số $\{x_n\} = \{2n - 1\} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
- Dãy số $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...\right\}$
- Dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_n = \begin{cases} n^5, \text{ nếu } n \,\vdots\, 2007 \\ 5^n, \text{ nếu } n \not\vdots\, 2007 \end{cases}$$

- Dãy số $\{x_n\} = \{2008\}$ là dãy số hằng.

2. *Cách xác định một dãy số*

Dãy số thường xác định bởi 2 cách:

Cách 1: Dãy số xác định bởi công thức x_n tính theo n:

Ví dụ: Dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_n = n^2 + \sin\frac{n\pi}{2007}$

Cách 2: Dãy số xác định bởi công thức quy nạp

Ví dụ: Dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 1001 \\ x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. *Dãy số đơn điệu:*

- Dãy số $\{x_n\}$ gọi là tăng (nghiêm ngặt) nếu $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} > x_n$), $\forall n \in \mathbb{N}$
- Dãy số $\{x_n\}$ gọi là giảm (nghiêm ngặt) nếu $x_{n+1} \leq x_n$ ($x_{n+1} < x_n$), $\forall n \in \mathbb{N}$
- Dãy số $\{x_n\}$ gọi là dãy đơn điệu nếu nó là một trong các loại dãy số trên.

4. *Dãy số bị chặn*

- Dãy số $\{x_n\}$ gọi là dãy bị chặn trên nếu tồn tại $M \in \mathbb{R}$ sao cho $x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
- Dãy số $\{x_n\}$ gọi là dãy bị chặn dưới nếu tồn tại số $m \in \mathbb{R}$ sao cho $x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$
- Dãy số $\{x_n\}$ gọi là dãy bị chặn nếu nó bị chặn trên và bị chặn dưới $\Leftrightarrow$ tồn tại $M > 0$ sao cho $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

B/ BÀI TẬP

B1. Xác định dãy số

Bài 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_n = \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}$ xác định 6 số hạng đầu tiên của dãy.

Giải

Ta có: $a_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$a_2 = \frac{1}{4}\cos\pi = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{16}\cos 2\pi = \frac{1}{16}$$

$$a_5 = \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi}{2} = 0$$

$$a_6 = \frac{1}{36}\cos 3\pi = -\frac{1}{36}$$

Bài 2. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases}$$

Xác định 6 số hạng đầu tiên của dãy.

Giải

Ta có: $x_1 = x_2 = 1$

$$x_3 = x_2 + x_1 = 2$$

$$x_4 = x_3 + x_2 = 3$$

$$x_5 = x_4 + x_3 = 5$$

$$x_6 = x_5 + x_4 = 8$$

Bài 3. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_{n+1} = 10a_n + 1 - 9n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Xác định công thức tính a_n theo n.

Giải

- Ta có $a_1 = 11 = 10 + 1$

$$a_2 = 110 + 1 - 9 = 102 = 10^2 + 1$$

Dự toán $a_n = 10^n + n$ (1)

- n = 1: Công thức (1) hiển nhiên đúng
- n = k: Giả sử công thức (1) đúng, tức là

$$a_k = 10^k + k$$

- $n = k + 1$: Ta có $a_{k+1}\ 10a_k + 1 - 9k = 10(10^k + k) + 1 - 9k$

  $= 10^{k+1} + k + 1$

$\Rightarrow$ Công thức (1) đúng với $n = k + 1$

Vậy: $a_n = 10^k + n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Bài 4. Hãy tìm công thức (xác định) số hạng tổng quát của dãy số khi biết các số hạng đầu tiên của dãy:

a) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Giải

a) Ta có:

$$a_1 = 1 = 2^{1-1}$$
$$a_2 = 2 = 2^{2-1}$$
$$a_3 = 4 = 2^{3-1}$$
$$a_4 = 8 = 2^{4-1}$$
$$a_5 = 16 = 2^{5-1}$$

....

$$a_n = 2^{n-1}$$

b) Ta có:

$$a_1 = -\frac{1}{2} = \frac{(-1)^1}{1+1}$$
$$a_2 = \frac{1}{3} = \frac{(-1)^2}{2+1}$$
$$a_3 = -\frac{1}{4} = \frac{(-1)^3}{3+1}$$
$$a_4 = \frac{1}{5} = \frac{(-1)^4}{4+1}$$

....

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Bài 5. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 7a_{n-1} - 11a_{n-2} + 5a_{n-3}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Tìm công thức tính a_n

Giải

Ta có: $a_n = 7a_{n-1} - 11a_{n-2} + 5a_{n-3}$

$\Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 6(a_{n-1} - a_{n-2}) - 5(a_{n-2} - a_{n-3})$

$\Leftrightarrow b_n = 6b_{n-1} - 5b_{n-2}$

(với $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$)

$\Leftrightarrow b_n - b_{n-1} = 5(b_{n-1} - b_{n-3}) = 5^2(b_{n-2} - b_{n-3}) = \dots. = 5^{n-2}(b_2 - b_1)$

Hơn nữa: $b_1 = a_1 - a_0 = 1$

$b_a = a_a - a_1 = 2$

$\Rightarrow b_n - b_{n-1} = 5^{n-2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_3 - b_2 = 5^1 \\ b_4 - b_3 = 5^2 \\ b_5 - b_4 = 5^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n - b_{n-1} = 5^{n-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n - b_2 = 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{n-2} = \frac{5(1-5)^{n-2}}{1-5} = \frac{5^{n-1} - 5}{4}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{5^{n-1} + 3}{4}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = \frac{5^{n-1} + 3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 - a_1 = \dfrac{5+3}{4} \\ a_3 - a_2 = \dfrac{5^2+3}{4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n - a_{n-1} = \dfrac{5^{n-1}+3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n - a_1 = \frac{(5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}) + 3(n-1)}{4} = \frac{\dfrac{5^n - 5}{4} + 3(n-1)}{4}$$

$$= \frac{5^n - 17}{16} + \frac{3n}{4}$$

Vậy: $a_n = \dfrac{5^n - 17}{16} + \dfrac{3n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Bài 6. Cho dãy số $\left\{u_n = \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{6}\right\}$

a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4, u_5

b) Chứng minh rằng: $u_n = u_{n+12}, \forall n \in \mathbb{N}$

Giải

Ta có

a) • $u_1 = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

• $u_2 = \sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$

• $u_3 = \sin\pi + \cos\frac{\pi}{2} = 0$

• $u_4 = \sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$

• $u_5 = \sin\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

b) Ta có

$$u_{n+12} = \sin\frac{1}{3}(n + 12)\pi + \cos\frac{1}{6}(n + 12)\pi$$

$$= \sin\left(\frac{1}{3}n\pi + 4\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{6}n\pi + 2\pi\right)$$

$$= \sin\frac{1}{3}n\pi + \cos\frac{1}{6}n\pi = u_n$$

(*Chú ý:* $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$)

B2. Bài tập đề nghị

1. Viết 6 số hạng đầu tiên của hằng số

$$\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$$

Đáp số: $2, 1, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}$

2. Cho dãy số $\{a_n\}$ định bởi công thức

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$$

Tính a_{2008}

Đáp số: $a_{2008} = \dfrac{3}{2^{2007}}$

3. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Xác định công thức tính a_n theo n.

Đáp số: $a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

4. Cho dãy số $\{S_n\}$ định bởi

$$\begin{cases} S_1 = a, S_2 = b \\ S_n = cS_{n-1} + dS_{n-2}, n \geq 3 \ (cd \neq 0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $S_n = p\alpha^n + q.\beta^n, \forall n \in \mathbb{N}$, trong đó p, q là các hằng số phụ thuộc vào a, b, α, β (với α, β là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - cx - d = 0$)

Hướng dẫn

- Hệ phương trình $\begin{cases} a = p\alpha + q\beta \\ b = p\alpha^2 + q\beta^2 \end{cases}$ luôn có nghiệm (p, q) (dùng phương pháp Crammer)

  $\Rightarrow$ Công thức đúng với $n \in \{1, 2\}$
- Để ý: $\alpha^2 - c\alpha - d = 0$

  $\Leftrightarrow \alpha^2 = c\alpha + d$

  $\Rightarrow \alpha^n = x\alpha^{n-1} + d\alpha^{n-2}$

  $\Rightarrow S_n = cS_{n-1} + dS_{n-2}$

  Từ đó chứng minh được yêu cầu bài toán nhờ vào phương pháp quy nạp.

5. Cho dãy số $\{b_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1 \\ b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $b_n < 6b_{n-2}, \forall n \geq 5$

Hướng dẫn

- $b_3 = 3$, $b_4 = 7$, $b_5 = 17$, $b_6 = 41$ nên $b_5 < 6b_3$, $b_6 < 6b_4$
- Giả sử $\begin{cases} b_{k-1} < 6b_{k-3} \\ b_k < 6b_{k-2} \end{cases}$

Suy ra $b_{k+1} = 2b_k + b_{k-1} < 2.6b_{k-2} + 6b_{k-3} \le 6(2b_{k-2} + b_{k-3}) \le 6b_{k-1}$

$\Rightarrow b_{k+1} < 6b_{k-1}$

$\Rightarrow b_n < 6b_{n-2}, \forall n \ge 5$

6. Cho dãy số Fibonacci:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \ge 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \forall n \in \mathbb{N}$$

Hướng dẫn: Chứng minh bằng phương pháp quy nạp hoặc sử dụng kết quả bài 4.

B3. Xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy số.

Bài 1. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $\left\{a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}\right\}$

b) $\left\{a_n = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right\}$

c) $\left\{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right\}$

Giải

a) Ta có:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2n+1}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2} \\ a_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{n+3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy: $\{a_n\}$ là dãy tăng.

b) Ta có:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2} = a_n + \frac{1}{(2n+3)^2} > a_n$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy tăng.

c) Ta có: $\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{1}{(2n)^3} \\ a_{2n+1} = \dfrac{-1}{(2n+1)^3} \\ a_{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+2)^3} \end{cases}$

$\Rightarrow a_{2n} > a_{2n+2} > a_{2n+1}$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy không đơn điệu.

Bài 2. Xét tính đơn điệu các dãy số sau:

a) $\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ b) $\left\{y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$

c) $\left\{z_n = \frac{n}{2007^n}\right\}$

Giải

a) *Cách 1:* Theo BĐT Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1 + \frac{n+1}{n}.\frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n$

$\Rightarrow \{x_n\}$ là dãy tăng

Cách 2: Theo BĐT Cauchy (gồm n số $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ và 1 số 1):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 > (n+1)\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow x_{n+1} > x_n$$

b) Ta có:

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n}.\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right).$$

(Do BĐT Bernoulli)

$$\geq \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n(n^2+4n+4} \geq \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 \Rightarrow z_n > z_{n+1}$$

$\Rightarrow \{z_n\}$ là dãy giảm.

c) Ta có:

$$\begin{cases} z_n = \dfrac{n}{2007^n} > 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{n+1}{2007^{n+1}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{2007^n} < 1 \Rightarrow z_{n+1} < z_n$$

$\Rightarrow \{z_n\}$ là dãy giảm.

Bài 3. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-3},\ n \geq 4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{u_n\}_{n\geq 3}$ là dãy số tăng.

Giải

- $u_4 = u_3 + u_1 = 2 > u_3$
- Giả sử $u_{k+1} > u_k$ $(3 \leq k \in \mathbb{N})$
- $u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+1} + u_{k-1} - (u_k + u_{k-2})$

  $= (u_{k+1} - u_k) + (u_{k+1} - u_{k-2}) > 0$

$\Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1} \Rightarrow \{u_n\}_{n\geq 3}$ là dãy tăng

Bài 4. Xét tính bị chặn của dãy:

$$a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Giải

Ta có:

$$0 < a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$\Rightarrow$ Dãy $\{a_n\}$ bị chặn.

Bài 5. Khảo tính bị chặn của các dãy số:

a) $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ số } 2}$

b) $b_n = (-1)^n \dfrac{n^2 - n + 2008}{n^2 + n + 2008} \sin \dfrac{n^2 + n + 1001}{n^2 - n + 1001}$

c) $c_n = \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3}$

Giải

a) • Ta có: $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ bị chặn dưới

• Ta còn phải chứng minh $\{a_n\}$ bị chặn trên

Quả vậy:

• $n = 1$: $a_1 = \sqrt{2} < 2$

• $n = k$: $(k \in \mathbb{N})$: Giả sử $a_k < 2$

• $n = k + 1$: Ta có: $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2 = 2}$

$\Rightarrow a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{a_n\}$ bị chặn trên $\Rightarrow$ (đpcm)

b) Ta có:

$$|b_n| = \frac{n^2 - n + 2008}{n^2 + n + 2008}\left|\sin \frac{n^2 + n + 1001}{n^2 - n + 1001}\right| \le 1.1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow -1 \le b_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{b_n\}$ là dãy bị chặn

c) Ta có: $\dfrac{1}{k^3} < \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}, \forall k > 1$

Suy ra:

$$0 < c_n < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \le 1 - \frac{1}{n} < 1, \forall n \ge 2$$

$\Rightarrow \{c_n\}$ là dãy bị chặn

Bài 6. Chứng minh rằng, dãy số $\left\{a_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}\right\}$ là dãy số bị chặn

Giải

Ta có: $a_n = \frac{1}{2}\frac{(2n^2-3)+5}{2n^2-3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}$

Hơn nữa: $2n^2 - 3 \geq 5, \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow 0 < \frac{5}{2n^2-3} \leq 1, \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < a_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)} \leq 1, \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy bị chặn.

Bài 7. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng, dãy $\{u_n\}$ là dãy số tăng và bị chặn.

Giải

- Trước hết ta chứng minh $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Quả vậy:

$+ n = 1 : u_1 = \frac{1}{2} \in (0, 1)$

$+ n = k$ $(k \in \mathbb{N})$: Giả sử $0 < u_k < 1$

$+ n = k + 1$: Theo giả thuyết quy nạp $0 < u_k < 1$

$\Rightarrow 0 < u_k^2 < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}(u_k^2 + 1) < 1$

$\Rightarrow 0 < u_{k+1} < 1$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp ta có: $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

- Ta có: $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 > 0$$

$\Rightarrow 1 > u_{n+1} > u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

B4. Bài tập đề nghị

1. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $a_n = 5n^2 - 2008$ b) $b_n = \dfrac{2n+1}{2n-2}$

c) $c_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$ d) $d_n = \left(-\dfrac{1}{2009}\right)^n$

Đáp số: • a, c là các dãy số tăng.

• b, d là các dãy số giảm.

• d dãy số không tăng, không giảm.

2. Xét tính đơn điệu cặc dãy số sau:

a) $a_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1}$ b) $\begin{cases} a_1 = 2008 \\ a_n = \dfrac{2 + 3a_{n-1}}{2 + a_n}, \ n \geq 2 \end{cases}$

c) $a_n = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ d) $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$ $(n \geq 10)$

Đáp số: • a, b, d là các dãy số giảm.

• c dãy số tăng.

3. Xét tính bị chặn các dãy số sau:

a) $a_n = \dfrac{2n^2 - n + 77}{n^2 + n + 77}$ b) $b_n = (-1)^n \dfrac{2n}{2n-1} . \cos \dfrac{n^2 - 1}{2009}$

c) $c_n = 7n^2 - n - 1001$

Đáp số: a, b: các dãy số bị chặn.

c: dãy số bị chặn dưới, không bị chặn trên.

4. Xét tính bị chặn các dãy số sau:

a) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$

b) $b_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

c) $c_n = (-1)^{n^2+1} + \sin\sqrt{n} + \cos(\sqrt{n} - 1)$

d) $d_n = \underbrace{\sqrt{2008 + \sqrt{2008 + \ldots + \sqrt{2008}}}}_{\text{n số 2008}}$

Đáp số: a, b, c, d là dãy số bị chặn

5. Cho dãy số định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 4, \ n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $\{a_n\}$ bị chặn trên bởi 8

b) Chứng minh rằng $\{a_n\}$ là dãy số tăng. Suy ra $\{a_n\}$ là dãy số bị chặn.

6. Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa:

$$0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m, \ \forall n, m \geq 1$$

Chứng minh rằng $\left\{\dfrac{x_n^7}{n}\right\}$ là dãy số bị chặn.

§3. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Cấp số cộng

1. Định nghĩa:

Dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d, \ n \geq 1 \end{cases} \text{(a, d cho trước)}$$

được gọi là cấp số cộng, kí hiệu $\div \ a_1, a_2, a_3, \ldots$

- a gọi là số hạng đầu tiên
- d gọi là công sai

2. Các tính chất

- $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- a_n, a_{n+1}, a_{n+2} là 3 số hạng liên tiếp của số cộng $\{a_n\}$ khi và chỉ khi $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + a_{n+2}), \ \forall n \geq 1$
- Tổng của n số hạng đầu tiên.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.n$$

II. Cấp số nhân

1. Định nghĩa:

Dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n.q \end{cases}$ (a, q cho trước ≠ 0) được gọi là cấp số nhân kí hiệu $\div\div$ $a_1, a_2, a_3, \ldots$

- a gọi là số hạng đầu tiên
- q gọi là công bội

2. Các tính chất

- $a_n = a_1.q^{n-1}$
- a_n, a_{n+1}, a_{n+2} là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân (a_n) khi và chỉ khi $a_{n+1}^2 = a_n.a_{n+2}, \forall n \geq 1$
- Tổng của n số hạng đầu tiên:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$$

B/ BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. Cho một cấp số cộng, biết số hạng đầu tiên là 9, số hạng thứ n là 49, công sai $d = \frac{5}{2}$. Tìm n

Giải

Ta có: $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = 49 \\ d = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Theo công thức $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\Rightarrow 49 = 9 + (n-1)\frac{5}{2} \Leftrightarrow 40 = (n-1)\frac{5}{2} \Leftrightarrow n = 17.$$

Bài 2. Xác định cấp số cộng (tìm a và d) khi biết

a) $S_4 = 15, S_7 = 12$

b) $d = 4, a_n = 43, S_n = 252$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} S_4 = \dfrac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \\ S_7 = \dfrac{7}{2}(2a_1 + 6d) = 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 7a_1 + 21d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{81}{14} \\ d = -\dfrac{19}{14} \end{cases}$$

b) Ta có: $a_n = a_1 + (n-1)d = 43$

$$\Rightarrow a_1 + (n-1)4 = 43 \Leftrightarrow a_1 = 47 - 4n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.n = \frac{94 - 8n + 4(n-1)}{2}.n$$

$$= n(-2n + 45) = 252$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 45n + 252 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = \dfrac{21}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 12$$

Vậy $a_1 = 47 - 4n = -1$

Bài 3. Tìm ba số hạng liên tiếp a, b, c của một cấp số nhân biết $a + b + c = 14$ và $abc = 64$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} b^2 = ac \ (1) \\ a + b + c = 14 \ (2) \\ abc = 64 \ (3) \end{cases}$

- (1) và (3) $\Rightarrow b^3 = 64 = 4 \Leftrightarrow b = 4$
- Thay $b = 4$ vào (1) và (2) ta có $\begin{cases} ac = 16 \\ a + c = 10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (a, c) \in \{(2, 8), (8, 2)\}$$

Vậy: $(a, b, c) \in \{(2, 4, 8), (8, 4, 2)\}$

Bài 4. Cho ba số dương a, b, c lập thành cấp số nhân.

Chứng minh rằng:

$\dfrac{a + b + c}{3}, \sqrt{\dfrac{ab + bc + ca}{3}}, \sqrt[3]{abc}$ cũng lập thành cấp số nhân.

Giải

Ta đã biết rằng:

"Ba số x, y, z ($\neq 0$) thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow y^2 = xz$"

Hơn nữa: $\frac{1}{3}(a + b + c).\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{3}(a + b + c)\sqrt[3]{b^3}$

$(\text{vì } ac = b^2) = \frac{1}{3}b(a + b + c)$

$= \frac{1}{3}(ab + b^2 + bc) = \frac{1}{3}(ab + bc + ca)$ (vì $b^2 = ca$)

$\Rightarrow \frac{1}{3}(a + b + c),\ \sqrt{\frac{1}{3}(ab + bc + ca)},\ \sqrt[3]{abc}$

Bài 5. Trong các cấp số nhân dưới đây, tính số hạng đầu tiên và công bội của nó, biết:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q^2 + u_1q^4 = 65 \\ u_1 + u_1.q^6 = 325 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 \\ u_1(1 + q^6) = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 \\ u_1(1 - q^2 + q^4)(1 + q^2) = 325 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 325 \\ 1 + q^2 = \dfrac{325}{65} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 \\ q = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \pm 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 72 \\ u_1(q^4 - q^2) = 72.2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2 - 1) = 72 \\ u_1q^2(q^2 - 1) = 72.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2 \end{cases}$

Bài 6. Cho cấp số nhân (a_n) thỏa các điều kiện: $a_5 = 96$ và $a_6 = 192$

a) Tính a_1, q

b) Tính S_4

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} a_5 = 96 \\ a_6 = 192 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_6}{a_5} = 2$

và $a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{96}{16} = 6$

b) $S_4 = \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \dfrac{6.(1-16)}{1-2} = 90$

Bài 7. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$, biết rằng:

a) $\underbrace{1+3+5+\ldots+a_n}_{n \text{ số hạng}} = 17161$. Tính n

b) $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147$. Tính $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$

Giải

a) Ta có: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}.n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2}.n = \dfrac{2+2(n-1)}{2}.n$

(vì $a_1 = 1$, $d = 2$)

$= n^2 = 17161 \Rightarrow n = 131.$

b) Ta có: $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147$

$\Leftrightarrow a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 6d + a_1 + 9d + a_1 + 12d + a_1 + 15d = 147$

$\Leftrightarrow 6a_1 + 45d = 147$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 15d = 49$

$\Rightarrow a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = a_1 + a_1 + 5d + a_1 + 10d + a_1 + 15d$

$= 4a_1 + 30d = 98.$

Bài 8. Cho $\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ $(a_1.a_2....a_n \neq 0)$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a_1.a_2} + \dfrac{1}{a_2.a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}.a_n} = \dfrac{n-1}{a_1.a_n}$

Giải

* Nếu $d = 0$ thì $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \neq 0$

Do đó $\dfrac{1}{a_1.a_2} + \dfrac{1}{a_2.a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}.a_n} = \dfrac{n-1}{a_1^2} = \dfrac{n-1}{a_1.a_n}$

* Nếu $d \neq 0$ thì

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_1.a_2} = \dfrac{a_2 - a_1}{d.a_1.a_2} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}\right) \\ \dfrac{1}{a_2.a_3} = \dfrac{a_3 - a_2}{d.a_2.a_3} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}.a_n} = \dfrac{a_3 - a_2}{d.a_{n-1}.a_n} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1.a_2} + \frac{1}{a_2.a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}.a_n} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n - a_1}{da_1a_n}$$

$$= \frac{1}{d}\,\frac{(n-1)d}{d_1.a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

Vậy hệ thức đã được chứng minh xong.

Bài 9. Cho a, b > 0. Giữa các số $\frac{a}{b^2}$, $\frac{b}{a^2}$ hãy đặt thêm số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Giải

Ta có: $a_1 = \frac{a}{b^2}$, $a_7 = \frac{b}{a^2}$

Gọi q là công bội của cấp số nhân cần tìm.

Ta có: $a_7 = a_1q^6 \Leftrightarrow \frac{b}{a^2} = \frac{a}{b^2}.q^6$

$$\Leftrightarrow q^6 = \frac{b^3}{a^3} \Leftrightarrow q = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Vậy có 2 cấp số nhân cần tìm là:

÷ $\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{1}{b}, \frac{1}{\sqrt{ab}}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{a^2}$

÷ $\frac{a}{b^2}, -\frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{1}{b}, -\frac{1}{\sqrt{ab}}, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{a^2}.$

Bài 10. Cho ΔABC có a = BC, b = CA, c = AB thứ tự tạo thành cấp số cộng với công sai là x

a) Gọi ra, rb, rc là các bán kính các đường tròn bằng tiếp các góc A, B, C (tương ứng)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{ra}, \frac{1}{rb}, \frac{1}{rc}$ cùng tạo thành cấp số cộng.

b) Cho biết b và x. Hãy tính ra, rb, rc theo b và x.

Giải

a) Ta có: 2b = a + c

$$ra = \frac{S}{p-a},\ rb = \frac{S}{p-b},\ rc = \frac{S}{p-c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ra} + \frac{1}{rc} = \frac{p-a+p-c}{S} = \frac{2p-(a+c)}{S} = \frac{2p-2b}{S} = \frac{2}{rb}$$

$\Rightarrow \frac{1}{ra}, \frac{1}{rb}, \frac{1}{rc}$ lập thành cấp số cộng.

b) Ta có: $2p = a + b + c = 3b \Rightarrow p = \frac{3b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p - a = \frac{3b}{2} - (b - x) = \frac{b}{2} + x \\ p - c = \frac{3b}{2} - (b + x) = \frac{b}{2} - x \end{cases}$$

Điều kiện tồn tại tam giác $\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - x < b + b + x \\ b < 2b \\ b + x < b - x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{2} \\ b > 0 \\ x < \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < \frac{b}{2} \\ b > 0 \end{cases}$$

Lúc này: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê rông)

$$= \sqrt{\frac{3b}{2}.\left(\frac{b}{2} + x\right)\left(\frac{b}{2} - x\right).\frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} b\sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ra = \frac{S}{p-a} = \frac{\sqrt{3}}{2} b\sqrt{\frac{b-2x}{b+2x}} \\ rb = \frac{S}{p-b} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2} \\ rc = \frac{S}{p-c} = \frac{\sqrt{3}}{2} b\sqrt{\frac{b+2x}{b-2x}} \end{cases}$$

C/ BÀI TẬP CƠ BẢN ĐỀ NGHỊ

1. Tìm $x \in [0, \pi]$ để sinx, sin2x, sin3x theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Đáp số: $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

2. Cho a, b, c lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$

b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

c) $x = a^2 + ab + b^2$, $y = a^2 + ac + c^2$, $z = b^2 + bc + c^2$ lập thành cấp số cộng.

3. Cho a, b, c, d lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng.

a) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

b) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

4. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ biết $a_5 = 10$, $a_9 = 22$. Hãy tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng trên.

Đáp số: $\begin{cases} a_1 = -2,\ d = 3 \\ S_{10} = 115 \end{cases}$

5. Cho ΔABC vuông tại C có 3 cạnh a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và chu vi bằng 12. Tính các cạnh đó.

Đáp số: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$

6. Tìm tổng của 10 số hạng đầu tiên của các cấp số nhân sau:

a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \ldots$

b) $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \ldots$

Đáp số: a) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

b) $4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1\right]$

7. Cho cấp số nhân $\{b_n\}$ có $b_2 = 12$, $b_4 = 192$, $b_7 = -12288$. Tìm các số hạng b_5, b_6

Đáp số: $b_5 = -768$, $b_6 = 3072$

8. Tính các tổng sau:

a) $S = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n \text{ số } 1}$

b) $S = 105 + 110 + 115 + \ldots + 995$

Đáp số: a) $S = \frac{1}{9}\left(10.\frac{10^n - 1}{9} - n\right)$

b) $S = 98450$, $n = 179$

9. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ gồm các số hạng dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} \quad (*)$$

Hướng dẫn

- Nếu $d = 0$ thì $(*)$ hiển nhiên đúng
- Nếu $d \neq 0$ thì

$$VT = \frac{1}{d}\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}\right)+\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}\right)+\ldots+\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)=\frac{a_n-a_1}{d\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}\right)}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

(vì $a_n = a_1 + (n-1)d$)

D/ BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ thỏa

$$\begin{cases} u_1 \neq 0, \forall i = 1,2,\ldots,2n \\ u_{j+2} = \dfrac{u_j + u_{j+1}}{2u_j - u_{j+1}}, \forall j = 1,2,\ldots 2n-2 \\ S_n = \displaystyle\sum_{k-1}^{2n} \frac{1}{u^k} = n \end{cases}$$

Tính $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{1}{u_i}\right)$ với $f(x) = \dfrac{1}{2008^{2x-1}+1}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 - 4)

Giải

Đặt $v_j = \dfrac{1}{u_j}$, $j = 1, 2, \ldots, 2n-2$

Từ công thức $u_{j+2} = \dfrac{u_j.u_{j+1}}{2u_2 - u_{j-1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{j+2}} = \frac{2}{u_{j+1}} - \frac{1}{u_j}$$

$\Leftrightarrow v_{j+2} + v_j = 2v_{j+1} \Rightarrow \{v_j\}_{j=1}^{2n}$ là cấp số cộng

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{2n} v_k = n(v_1 + v_{2n}) = n \Rightarrow v_1 + v_{2n} = 1$$

Do $\{v_j\}_{j=1}^{2n}$ là cấp số cộng nên:

$v_1 + v_{2n} = v_2 + v_{m-1} = \dots = v_n + v_{n+1} = 1$

Hơn nữa, với a + b = 1, ta có:

$$f(a) + f(b) = \frac{1}{2008^{2a-1}+1} + \frac{1}{2008^{2b-1}+1}$$
$$= \frac{1}{2008^{2a-1}+1} + \frac{1}{2008^{1-2a}+1}$$
$$= \frac{1}{2008^{2a-1}+1} = \frac{2008^{2a-1}}{2008^{2a-1}+1} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{1}{u_i}\right) = \sum_{i=1}^{2n} f(v_i) = n[f(v_1) + f(v_{2n})] = n$$

Vậy $\sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{1}{u_i}\right) = n$

Bài 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Đặt $v_n = \dfrac{v_n + 1}{u_n}$. Chứng minh rằng $\{v_n\}$ là một cấp số cộng. Từ đó suy ra biểu thức của u_n và v_n theo n.

Giải

a) • n = 1: $u_1 = -2 < 0$

• n = k ($k \in \mathbb{N}$): Giả sử $u_k < 0$

• n = k + 1: Ta có: $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1-u_k} < 0$

Vậy $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Ta có: $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

$$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = -1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -1$$

$\Rightarrow \{v_n\}$ là cấp số cộng có công sai $d = -1$

Từ đó suy ra:

$$v_n = v_1 + (n-1)d = \frac{u_1 + 1}{u_1} + (n-1)(-1) = \frac{3}{2} - n$$

và $\quad v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - n - 1} = \frac{2}{1 - 2n}$$

Bài 3. Cho dãy số $\{u_n\}$ định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{5} \end{cases}$

Và dãy số $\{v_n = u_n - 2\}$

Chứng minh rằng $\{v_n\}$ là một cấp số nhân. Từ đó suy ra biểu thức của u_n và v_n theo n.

Giải

Ta có: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n + 8}{5} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{5} = \dfrac{v_n}{5}$

$\Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{1}{5} v_n$

$\Rightarrow \{v_n\}$ là một cấp số nhân với số hạng đầu tiên $v_1 = -1$ và công bội $q = \dfrac{1}{5}$.

Khi đó: $v_n = v_1 q^{n-2} = -\dfrac{1}{5^{n-1}}$ và $u_n = v_n + 2 = 2 - \dfrac{1}{5^{n-1}}$

Bài 4. Cho ΔABC có các cạnh a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác này có hai góc mà số đo (theo độ) nhỏ hơn hay bằng 60^0.

Giải

Ta có: $b^2 = ac$ (do giả thiết)

Suy ra: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \geq \dfrac{2ac - b^2}{2ac} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 < B \leq 60^0 \qquad (1)$$

(vì hàm số $y = \cos x$ giảm trên $[0^0, 180^0]$)

Mặt khác, cũng từ: $b^2 = ac$

$\Rightarrow b^2 \geq (\min\{a, c\})^2$

$\Rightarrow b \geq \min\{a, c\}$

$\Rightarrow 60^0 \geq \min\{A, C\}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 5. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$. Chứng minh rằng:

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

Giải

Ta có: $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}.\left[\dfrac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \dfrac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}\right]$

$$= \frac{a_1^2}{(1-q)^2}(1-q^n)(q^{2n}-q^{3n}) = \frac{a_1^2}{(1-q)^2}(1-q^n)^2.q^{2n}$$

$$= \frac{a_1^2}{(1-q)^2}(q^{2n}-q^n)^2$$

$$= \left(\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\right) = (S_{2n} - S_n)^2$$

Vậy: $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

Bài 6. Cho phương trình: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ $(r \neq 0)$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng ba nghiệm này lập cấp số nhân khi và chỉ khi $q^3 = rp^3$

Giải

Theo định lý Viét $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \\ x_1x_2x_3 = r \neq 0 \end{cases}$

Đặt $\alpha = \dfrac{x_1^2}{x_2x_3}$, $\beta = \dfrac{x_2^2}{x_3x_1}$, $\gamma = \dfrac{x_3^2}{x_1x_2}$

Khi đó: • $\alpha\beta\gamma = 1$

• $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1x_2x_3}$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3}$$

$$= \frac{p^3 - 3pq + 3r}{r}$$

$$\bullet\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{(x_1x_2)^3 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^3}{(x_1x_2x_3)^2} =$$

$$\frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^3 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{(x_1x_2x_3)^2}$$

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 + 3(x_1x_2x_3)^2}{(x_1x_2x_3)^2}$$

$$= \frac{q^3 - 3q.pr + 3r^2}{r^2}$$

$\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$ là các nghiệm của phương trình.

$$x^3 - \frac{p^3 - 3qp + 3r}{r}x^2 + \frac{q^3 - 3q.pr + 3r^2}{r^2}x - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow r^2x^3 - r(p^3 - 3pq + 3r)x^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2)x - r^2 = 0$ (*)

Vì vậy x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = 1\\ \beta = 1\\ \gamma = 1\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow r^2 - r(p^3 - 3pq + 3r) + (q^3 - 3pqr + 3r^2) - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow q^3 = rp^3$

Bài 7. Định m để phương trình $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

(Đề thi đại học)

Giải

Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình đã cho trở thành:

$t^2 - 2(m + 1)t + 2m + 1 = 0$ (1)

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ \delta > 0\\ \rho > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2 - (2m+1) > 0\\ 2(m+1) > 0\\ 2m + 1 > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2 > 0\\ m > -1\\ m > -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0 \qquad (2)$$

Gọi 2 nghiệm dương của phương trình (1) là t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) thì 4 nghiệm của phương trình đã cho là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$ = $\sqrt{t_2}$ $-\sqrt{t_1}$.
Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng.

$$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1}$$

$$\Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Mặt khác, theo định lý Viét:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t_1 = 2(m+1) \\ 9t_1^2 = 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{m+1}{5} \\ t_1^2 = \dfrac{2m+1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{5}\right)^2 = \frac{2m+1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9(m+1)^2 = 25(2m+1) \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right. \text{ (thỏa (2))}$$

Vậy: $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$ là các giá trị cần tìm.

E/ BÀI TẬP NÂNG CAO ĐỀ NGHỊ

1. Chứng minh rằng: 2, 3, 5 không thể là các số hạng của một cấp số nhân (không nhất thiết là liên tiếp)

2. Chứng minh rằng:

$$7 + 77 + \ldots + \underbrace{77\ldots7}_{n \text{ số } 7} = \frac{7}{9}.\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}, \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Cho ΔABC có $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$ lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng tam giác này có hai góc nhỏ hơn hay bằng $\frac{\pi}{3}$

(ĐH Sư Phạm Hà Nội)

4. Chứng minh rằng: Nếu phương trình
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng thì $x_0 = -\frac{a}{3}$ là nghiệm.

5. Cho dãy số $\{a_n\} \subset \mathbb{N}$ thỏa $a_n = \dfrac{2a_{n-1}.a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$

Chứng minh rằng: $a_{2007} = a_{2008} = a_{2009}$

6. Chứng minh rằng, nếu $\{a_n\}$ là một cấp số nhân thì $\left\{a_n^{2008}\right\}$ cũng là một cấp số nhân

7. a, b cho trước. Các số hạng $u_0, u_1, u_2, \ldots$ của dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi hệ thức $u_{n+1} = (a + b)u_n = -abu_{n-1}$, $n \geq 1$

Hãy biểu diễn u_n theo a, b, u_0, u_1, u_2 và n.

Dựa vào kết quả trên, hãy tính u_n theo n của dãy số Fibonacci: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n+1},\ n \geq 1 \end{cases}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Đáp số: • $u_n = \begin{cases} \dfrac{a^n - b^n}{a - b}u_1 - ab\dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}u_0,\ a \neq b \\ na^{n-1}u_1 - (n-1)a^n.u_0,\ a = b\ (n \geq 2) \end{cases}$

• Với dãy Fibonacci: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ $(n \geq 1)$

8. Các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lập thành cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Biết rằng các số a_1, a_2, a_3, a_4, a_k lập thành cấp số nhân. Tính k.

Đáp số: $k = 8$

9. Giải phương trình: $x^3 + 7x^2 + 14x + a = 0$

Biết rằng các nghiệm của phương trình khác nhau và lập thành cấp số nhân.

Đáp số: • $a = 8$

• $x_1 = -1$, $x_2 = a_1q = -2$

• $x_3 = a_1q^2 = -4$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_n = \dfrac{u_{n-1} - 1}{2}, \; n \geq 2 \end{cases}$. Tính a_4?

Đáp số:

A. $\dfrac{75}{128}$ B. $\dfrac{-75}{128}$ C. $\dfrac{-55}{128}$ D. $\dfrac{55}{128}$

2. Cho dãy số $\{u_n = 3^n\}$. Tính u_{n+1}?

Đáp số:

A. $u_{n+1} = 3^n + 1$ B. $u_{n+1} = 3.3^n$

C. $u_{n+1} = 9^n$ D. $u_{n+1} = 3^{2n}$

3. Một cấp số cộng $\{u_n\}$ có $u_3 - u_2 = 7$ và $u_1 = 1$. Tính u_{21}?

Đáp số:

A. 132 B. 123

C. 312 D. Một đáp số khác

4. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

$\{a_n = 12^n\}$, $\{b_n = 5n^2\}$, $\{c_n = 2^n + 2008\}$, $\{d_n = 2^{n+\sqrt{n}} + 1\}$

Đáp số:

A. $\{a_n\}$ B. $\{b_n\}$ C. $\{c_n\}$ D. $\{d_n\}$

5. Bốn số lập thành cấp số cộng có công sai dương. Tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

Đáp số:

A. ÷ 2, 4, 6, 8 B. ÷ 1, 3, 5, 7

C. ÷ 1, 4, 7, 10 D. ÷ 1, 5, 7, 13

6. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60, \; u_1 < 0 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

Đáp số:

a) A. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases}$

b) A. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ d = \dfrac{21}{5} \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = -12 \\ d = \dfrac{21}{5} \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -7 \\ d = \dfrac{21}{5} \end{cases}$ D. Một đáp số khác

7. Tính tổng

$$S = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$$

Đáp số:

A. $\dfrac{n^2}{7}$ B. $2^n.\dfrac{n^2}{9}$

C. $(n + 1)^n\dfrac{(2n + 1)}{7}$ D. Tất cả đều sai

8. Cho a, b, c, d thứ tự lập thành cấp số nhân. Hãy tính:

$$\Sigma = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 - (a - d)^2$$

Đáp số:

A. 2 B. 1 C. 0 D. –1

9. Cho ΔABC $a \le b \le c$ và a, b, c thứ tự lập thành cấp số nhân. Hỏi ΔABC có bao nhiêu góc $\le 60^0$?

Đáp số:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 = \dfrac{1}{27} \\ u_7 = \dfrac{1}{729} \end{cases}$. Tính u_1 và q?

Đáp số:

A. $u_1 = 5, q = \dfrac{1}{5}$ B. $u_1 = \dfrac{1}{3}, q = 1$

C. $u_1 = \dfrac{1}{5}, q = 5$ D. $u_1 = 1, q = \dfrac{1}{3}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Chọn C.

Ta có $a_1 = \sqrt{2}$

$$a_2 = \frac{a_1^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2^2 - 1}{2} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$a_4 = \frac{a_3^2 - 1}{2} = \frac{64 - 1}{2} = \frac{-55}{128}$$

2. Chọn B.

$$u_{n+1} = 3^{n+1} = 3{,}3^n$$

3. Chọn D.

Ta có $\begin{cases} u_3 - u_2 = 7 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + d) = 7 \\ u_1 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{21} = u_1 + 20d = 1 + 20.7 = 141$$

4. Chọn A. $\{a_n = 12^n\}$

5. Chọn C.

Gọi 4 số cần tìm là x – 3d, x – d', x + d', x + 3d' (công sai d = 2d' > 0).

Khi đó:

$$\begin{cases} (x - 3d') + (x - d') + (x - d') + (x + 3d') = 22 \\ (x - 3d')^2 + (x - d')^2 + (x + d')^2 + (x + 3d')^2 = 166 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 4x^2 + 20d'^2 = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ x^2 + 5d'^2 = \frac{83}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ d' = \frac{3}{2} \ (\text{vì } d'' > 0) \end{cases}$$

Vậy 4 số cần tìm là 1, 4, 7, 10

6. a) Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_9 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

b) Chọn B.

Ta có: $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60,\ u_1 < 0 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 6d) + (u_1 + 14d) = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \\ u_1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 30,\ u_1 < 0 & (1) \\ u_1^2 + 65d^2 + 14u_1d = 585 & (2) \end{cases}$$

Thay $u_1 = 30 - 10d$ vào (2), ta có:

$$(30 - 10d)^2 + 65d^2 + 14d(30 - 10d) = 585$$

$$\Leftrightarrow 900 + 100d^2 - 600d + 65d^2 + 420d - 140d^2 = 585$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 - 180d + 315 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5d^2 - 36d + 63 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 3 \Rightarrow u_1 = 0 \text{ (loại)}. \\ d = \dfrac{21}{5} \Rightarrow u_1 = -12 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $\begin{cases} u_1 = -12 \\ d = \dfrac{21}{5} \end{cases}$

7. Chọn D.

Ta có: $S = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$

$$= (2^2 + 4^2 + \ldots + 2^{2n}) + 2n + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right)$$

$$= \frac{4(4^n - 1)}{4 - 1} + 2n + \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 2n + \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

$$= 2n + \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{1}{3.4^n}(4^n - 1)$$

$$= 2n + \frac{1}{3}(4^n - 1)\left(4 - \frac{1}{4^n}\right)$$

Vậy: $S = 2n + \dfrac{\left(4^n - 1\right)\left(4^{n+1} + 1\right)}{3.4^n}$

8. Chọn C.

Ta có: $\Sigma = (a - aq^2)^2 + (aq - aq^2)^2 + (aq - a^3q)^2 - (a - aq^3)^2$

$= a^2(1 - q^2)^2 + a^2q^2(1 - q)^2 + a^2q^2(1 - q^2)^2 - a^2(1 - q^3)^2$

$= a^2[(1 - q^2)^2 + q^2(1 - q)^2 + q^2(1 - q^2)^2 - (1 - q^3)^2]$

$= a^2(1 - 2q^2 + q^4 + q^2 - 2q^3 + q^4 + q^2 - 2q^4 + q^6 - 1 + 2q^3 - q^6) = 0$

Vậy $\Sigma = 0$

9. Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} a \le b \le c \\ b^2 = ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \le B \le C \\ b^2 = ac \end{cases}$

Theo định lý hàm cos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \ge 2ac - 2ac\cos B \ge 2b^2(1 - \cos B)$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \ge 1 - \cos B \quad \Rightarrow \cos B \ge \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow B \le 60^0$

Vậy: $A \le B \le 60^0 \le C$

10. Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} u_4 = \dfrac{1}{27} \\ u_7 = \dfrac{1}{729} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 = \dfrac{1}{27} \\ u_1.q^6 = \dfrac{1}{729} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = \dfrac{1}{27} \\ u_1.q^3 = \dfrac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Chương IV

GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

/TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ về x (còn gọi là có giới hạn là x) nếu $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

2. Các định lí cơ bản

Định lí 1: Nếu một dãy số hội tụ thì nó bị chặn.

(Điều đảo lại không đúng, chẳng hạn lấy $\{x_n = (-1)^n\}$ thì dãy này bị chặn, nhưng không hội tụ).

Định lí 2: Nếu một dãy số hội tụ về x thì x là duy nhất

Định lí 3: Nếu các dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ thì $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$, $\{x_ny_n\}$ cũng hội tụ ($\alpha, \beta \in R$) và $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \beta \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(x_ny_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n . \lim\limits_{n\to+\infty} y_n \end{cases}$

Ngoài ra, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$ thì dãy $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n}$$

Định lý 4: (Tính chất kẹp)

- Nếu các dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ và $x_n \leq y_n, \forall n \geq n_0$ (với n_0 cố định nào đó $\in$ N) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
- Nếu các dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ thỏa $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$ (với n_0 cố định nào đó $\in$ N) và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x \in R$ thì dãy số $\{y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$.
- Nếu dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ thỏa $|x_n| \leq y_n \; \forall n \geq n_0$ (với n_0 cố định nào đó $\in$ N) và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Định lý 5:

- Nếu dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
- Nếu dãy $\{y_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lí 6:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C$ (với C là hằng số)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ (với $\alpha > 0$)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ (với $|q| < 1$)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (với $a > 0$)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

3. Dãy số dần tới vô cực

3.1. Các định nghĩa

- Dãy $\{x_n\}$ gọi là dần tới $+\infty$ nếu:

  $\forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow a_n > M$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$,

  hay $x_n \to +\infty$, khi $n \to +\infty$.

- Dãy $\{x_n\}$ gọi là dần tới $-\infty$ nếu:

  $\forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow a_n < -M$

  Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

  Hay $x_n \to -\infty$, khi $n \to +\infty$.

3.2. Định lí:

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$
- Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 \\ x_n \neq 0, \forall n \geq n_0 (\text{với } n_0 \text{ cố định nào đó} \in \mathbb{N} \end{cases}$

  thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$.

- Dãy $\{x_n\}$ gọi là dần tới ∞ nếu: $\forall M > 0, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$, n > n

  $\Rightarrow |x_n| > M$

Ký hiệu: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \infty$ hay $x_n \to \infty$, khi $n \to +\infty$.

4. *Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:*

- Cấp số nhân vô hạn $\{x_n\}$ có công bội $q \in (-1; 1)$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn $\{x_n\}$ có công bội q. Khi đó:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}$$

Do $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}$

Ta gọi giới hạn này là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\{x_n\}$ và ký hiệu là:

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots = \frac{x_1}{1-q}$$

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng, dãy số sau đây hội tụ:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Giải

- Ta có:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy tăng (1)

- Hơn nữa:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ số}} = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy số bị chặn trên.

Bài 2. Chứng minh rằng, dãy số sau đây hội tụ:

$$a_n = \frac{\cos^2 1}{2} + \frac{\cos^2 2}{2^2} + \dots + \frac{\cos^2 n}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Giải

- Ta có: $\begin{cases} a_n = \dfrac{\cos^2 1}{2} + \dfrac{\cos^2 2}{2^2} + \dots + \dfrac{\cos^2 n}{2^n} \\ a_{n+1} = \dfrac{\cos^2 1}{2} + \dfrac{\cos^2 2}{2^2} + \dots + \dfrac{\cos^2 n}{2^n} + \dfrac{\cos^2(n+1)}{2^{n+1}} \end{cases}$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{\cos^2(n+1)}{2^{n+1}} > a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy tăng.

- Hơn nữa

$$0 < a_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} < 1$$

$\Rightarrow 0 < a_n < 1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy bị chặn.

Vậy: $\{a_n\}$ là dãy hội tụ.

Bài 3. Chứng minh rằng, dãy số sau đây hội tụ:

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{4^n}\right),\ n \in \mathbb{N}$

b) $b_n = \frac{n!}{n^n},\ n \in N$

c) $a_1 = \frac{x_0}{a + x_0},\ a_2 = \frac{a_1}{a + a_1},\ \dots,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{a + a_1},\ n \ge 2$

(với $a \ge x_0 > 1$ là các hằng số cho trước)

Giải

a) Ta có:

- $0 < a_n < 1$
- $a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$

$$= a_n\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) < a_n,\ \forall n \in N$$

Vậy dãy $\{a_n\}$ giảm, bĩ chặn dưới bởi O nên hội tụ.

- $b_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \dfrac{n!}{n^n}.\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow b_n > b_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{b_n\}$ là dãy giảm, bị chặn dưới bởi O nên hội tụ.

c) Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng:

$1 > a_n > 0$, khi đó $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a + a_{n-1}} < a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vậy: $\{a_n\}$ là dãy hội tụ

Bài 4. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$, $n \geq 3$

Chứng minh rằng: a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2, \forall n \geq 3$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Giải

a) Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!.2^n}{2^{n+1}.n!} = \frac{n+1}{2} \geq 2, \forall n \geq 3.$$

b) Theo câu a) ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{u_4}{u_3} \geq 2 \\ \dfrac{u_5}{u_4} \geq 2 \\ \dots \\ \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \geq 2 \qquad (n \geq 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u_4}{u_3}.\frac{u_5}{u_4}\dots\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 2^{n-3}, \forall n \geq 4 \quad \Rightarrow \frac{u_n}{u_3} \geq 2^{n-3}, \forall n \geq 4$$

$$\Rightarrow u_n \geq \frac{3!}{2^3}.2^{n-3} = 3.\ 2^{n-5}, \forall n \geq 4 \Rightarrow u_n > 2^{n-5}, \forall n \geq 4.$$

Với $n \ge 6$ thì $2^{n-5} = (1 + 1)^{n-5} \ge 1 + (n - 5)1 \ge n - 4$

$\Rightarrow u_n > n - 4, \forall n \ge 6$.

Do đó:

Cho $M > 0$ (tùy ý), chọn $n_0 = [M] + 7$ (với $[M]$ là phần nguyên của M), khi đó:

$$u_n > n - 4 \ge [M] + 3 > M, \forall n > n_0.$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Bài 5. Dùng định nghĩa của dãy số, chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^5} = 0$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 5} = 1$

Giải

a) Cho $\varepsilon > 0$ (tùy ý), chọn $n_0 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$

Khi đó, với $n > n_0$ thì:

$$\left|\frac{1}{n^5} - 0\right| = \frac{1}{n^5} < \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon \text{ (vì } \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\text{)}$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^5} = 0$

b) Cho $\varepsilon > 0$ (tùy ý), chọn $n_0 = \left[\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$

Khi đó, với $n > n_0$ thì:

$$\left|\frac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 5} - 1\right| = \frac{4}{n^2 + 3n + 5} < \frac{4}{n^2} < \frac{4}{n_0^2} < \varepsilon$$

(vì $\left[\dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > \dfrac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$)

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 5} = 1$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ $|q| < 1)$.

Giải

- Nếu $q = 0$ thì công thức trên hiển nhiên đúng.
- Nếu $0 < |q| < 1$ thì $\dfrac{1}{|q|} > 1$.

Đặt: $\dfrac{1}{|q|} = 1 + a\ (a > 0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{|q|^n} = (1 + a)^n \geq 1 + na > na \text{ (Do BĐT Bernoulli)}$$

$$\Rightarrow |q|^n < \frac{1}{na}$$

Cho $\varepsilon > 0$ (tùy ý), chọn $n_0 = \left[\dfrac{1}{a\varepsilon}\right] + 1$.

Khi đó, với $n > n_0$ thì: $|q^n - 0| = |q|^n < \dfrac{1}{na} < \dfrac{1}{n_0 a} < \varepsilon$.

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Bài 7. a) Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d} = 1$

b) Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + 2008^n}$

(trong đó: a, b, c, d là các hằng số dương)

Giải

a) * Nếu $d \geq 1$

Đặt: $q = \sqrt[n]{d} - 1 \geq 0$

$$\Rightarrow d = (1 + q)^n \geq 1 + nq > nq \text{ (Do BĐT Bernoulli)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{n} > q = \sqrt[n]{d} - 1 \Rightarrow \frac{d}{n} + 1 > \sqrt[n]{d} \geq 1$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{d}{n} + 1\right) = 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d} = 1$.

(Do tính chất kẹp)

* Nếu $0 < d < 1$ thì $\dfrac{1}{d} > 1$

Khi đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{d}} = 1$

Từ đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{d}} = 1$

Vậy: $\forall d > 0$, ta luôn có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d} = 1$.

b) Đặt: $\alpha = \max\{a, b, c, 2008\}$

Lúc này: $\alpha^n \le a^n + b^n + c^n + 2008^n \le 4.\alpha^n$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + 2008^n} \le \alpha^n.\sqrt[n]{4}$$

Theo câu a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\sqrt[n]{4} = \alpha$.

Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + 2008^n} = \max\{a, b, c, 2008\}$.

Bài 8. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Giải

Đặt: $a = \sqrt[n]{n} - 1 \ge 0$ $(\forall n \ge 2)$

$$\Rightarrow n = (1 + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k > C_n^2 a^2$$

$$\Rightarrow n > \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

$$\Rightarrow a < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad \Rightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Vì vậy, với $\varepsilon > 0$, $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right] + 2$ thì

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \sqrt{\frac{2}{n_0 - 1}} < \varepsilon, \forall n > n_0$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bài 9. Cho dãy không âm $\{a_n\}$ hội tụ về a.

Chứng minh rằng: $a \ge 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Từ đó suy ra kết quả của $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$.

Giải

* Nếu $a < 0$, ta chọn $\varepsilon_0 = -2a > 0$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ nên tồn tại $n_0 = n_0(\varepsilon_0) \in N$,

sao cho: $|a_n - a| < \varepsilon_0, \forall n > n_0$

$\Rightarrow a_n < \varepsilon_0 + a = -a < 0, \forall n > n_0$

$\Rightarrow a_n < 0, \forall n > n_0$

$\Rightarrow$ vô lý (vì $a_n \ge 0, \forall n \in N$).

Vậy: $a \geq 0$.

* Cũng do $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ nên với $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho: $|a_n - a| < \varepsilon^2, \forall n > n_1$

$$\Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|a_n - a|} < \varepsilon, \forall n > n_1$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

$$* \lim_{n \to +\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Chú ý: Ta luôn có BĐT: $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}, \forall a, b \geq 0$.

Quả vậy:

* Nếu $a \geq b \geq 0$ thì

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b} + \sqrt{a-b}$$

$$\Leftrightarrow a \leq b + a - b + 2\sqrt{b(a-b)}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{b(a-b)}$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng.

* Nếu $0 \leq a \leq b$ thì BĐT cũng đúng (chứng minh tương tự như trường hợp $a \geq b \geq 0$).

Bài 10. Cho dãy số (a_n) không âm hội tụ về a. Hãy chứng minh rằng: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$. Từ đó suy ra kết quả của $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2}}{2n+2008}$.

Giải

* $\forall x, y \geq 0$, ta luôn có: $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq \sqrt[3]{|x-y|}$ (1)

Quả vậy, không giảm tính tổng quát ta xem $x \geq y \geq 0$.

Khi đó: $z = x - y \geq 0$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{y})^3 = \underbrace{z+y}_{x} + 3\sqrt[3]{zy}(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{y}) \geq x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{y} \geq \sqrt[3]{x}$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x-y} \geq \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \geq 0$

$\Rightarrow$ (1) đúng.

Do đó, từ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

với $\varepsilon > 0$ (tùy ý), ta luôn tìm được $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$

Sao cho: $|a_n - a| < \varepsilon^3, \forall n > n_0$

$\Rightarrow \left|\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}\right| \leq \sqrt[3]{|a_n - a|}$ (do (1)) $< \varepsilon, \forall n > n_0$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$.

(Bạn đọc để ý rằng trong quá trình chứng minh ta có sử dụng $a \geq 0$)

$$* \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2}}{2n + 2008} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}}{2 + \frac{2008}{n}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Bài 11. Cho $a_n = \dfrac{[a] + [2a] + \ldots + [na]}{n^2}$, (với $a \in R$ là hằng số cho trước và $[a]$ là phần nguyên của a). Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Giải

Ta có: $ka - 1 < [ka] \leq ka, \forall k \in N$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(ka - 1) < \sum_{k=1}^{n}[ka] \leq \sum_{k=1}^{n} ka$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)a}{2} - n\right] < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[ka] < \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)a - \frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)a$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{a}{2}$ (do tính chất kẹp).

Bài 12. Cho dãy số được xác định bởi:

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}, k \in N.$$

Tính: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2008}^n}$.

(Đề thi Olympic 30–4)

Giải

Vì: $x_{k+1} - x_k = \dfrac{k+1}{(k+2)!} > 0, \forall k \in N$

$\Rightarrow \{x_k\}$ là dãy tăng

$\Rightarrow 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2008}$

$\Rightarrow x_{2008}^n < x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2008}^n < 2008.\ x_{2008}^n$

$\Rightarrow x_{2008} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2008}^n} < \sqrt[n]{2008}\ .\ x_{2008}$

Mặt khác, ta có:

- $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}, \forall k \in N$

$\Rightarrow x_k = \left(1 - \dfrac{1}{2!}\right) + \left(\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \dfrac{1}{(k+1)!}$

$\Rightarrow x_{2008} = 1 - \dfrac{1}{2009!}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2008}\ .x_{2008} = x_{2008}.$

Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2008}^n} = x_{2008} = 1 - \dfrac{1}{2009!}$

Bài 13. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_n^2}{2008}, \ n \ge 1 \end{cases}$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

(Đề thi đề nghị Olympic 30–4)

Giải

Ta có: $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n^2}{a_n.a_{+1}} = \dfrac{2008(a_{n+1} - a_n)}{a_n an + 1} = 2008\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_k}{a_{k+1}} = 2008\left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right) = 2008\left(1 - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$

Mặt khác, ta có: $a_{n+1} > a_n > 1, \forall n \ge 2$

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.

Do đó, nếu $\{a_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại một giới hạn hữu hạn bằng $a \ge 1$, suy ra $a = a + \dfrac{a^2}{2008}$ (vì $a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_n^2}{2008}, \forall n \ge 1$)

$\Rightarrow a = 0$ (vô lý)

$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy tăng không bị chặn trên

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2008.$$

Bài 14. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{3n+6}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-6n+7}{3n^2-1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2.3^n-5.6^n}{3^n+7.6^n}$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n-3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

Giải

a) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{3n+6} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{3+\frac{6}{n}} = \frac{2}{3}.$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-6n+7}{3n^2-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4-\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3}.$$

c) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{2.3^n-5.6^n}{3^n+7.6^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2.\left(\frac{1}{2}\right)^n-5}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+7} = \frac{-5}{7}\ \left(\text{vì } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\right).$$

d) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n-3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n+1}{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3} = \frac{1}{3}\ \left(\text{vì } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0\right).$$

Bài 15. Tính các giới hạn

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

b) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}}{\dfrac{1\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}{2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{2\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} = \frac{3}{4}$$

(vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$).

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = -\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = -1$$

d) Ta có: $1-\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, $\forall k \neq 0$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{2.4}{3^2}\ldots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{[1.2\ldots(n-1)].[3.4\ldots(n+1)]}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Bài 16. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}\ldots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

Giải

Ta có: $\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$

$$= \frac{k-1}{k+1}.\frac{k^2+k+1}{(k+1)^2+(k-1)+1}$$

Nên $\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}\ldots\frac{n^3-1}{n^3+1}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{2^2+2+1}{1^2+1+1}.\frac{2}{4}.\frac{3^2+3+1}{2^2+2+1}.\frac{3}{5}.\frac{4^2+4+1}{3^2+3+1}\ldots$$

$$\ldots\frac{n-1}{n+1}.\frac{n^2+n+1}{(n-1)^2+(n-1)+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}\ldots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right) = \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}.$$

Bài 17. Tính các giá trị giới hạn

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, với $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ số } 2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, với $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$, với $z_n = \frac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$.

Giải

a) Ta có: $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $\forall n \geq 1$

- $n = 1$: $x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow 1 < x_1 < 2$
- $n = k$: Giả sử $1 < x_k < 2$
- $n = k + 1$: ta có: $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$

$\Rightarrow 1 < x_{k+1} < \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow 1 < x_n < 2, \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{(1 + x_1)(2 - x_n)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} > 0$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên hội tụ về $x \in [1, 2]$

Hơn nữa, từ $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

Cho $n \to +\infty$, ta được:

$$x = \sqrt{2 + x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2.$

b) Ta có: $\dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq y_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Dễ thấy rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1$

nên: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1.$

c) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \dfrac{2}{9} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5n} = 0$

(vì $0 < \dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5n} = 0$)

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0.$

Chú ý: Cho dãy $\{a_n\}$ bất kỳ $\subset$ R. Khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$$

(Bạn đọc tự chứng minh).

Bài 18. Cho dãy số $\{x_n\}$ hội tụ về $x > 0$. Chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$ (với $y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x$ (với $z_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$).

Giải

a) Do $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$ nên với $\varepsilon > 0$, ta tìm được $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$

sao cho: $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > n_0$.

- Ngoài ra, do $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên với $\varepsilon > 0$ (ở trên), ta tìm được

$n_1 = n_1(\varepsilon) \in N$ sao cho $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2M}$, $\forall n > n_1$ (với $M = \sum\limits_{i=1}^{n_0} |x_i - x|$)

- Do đó, với $n > \max\{n_0, n_1\}$ thì

$$|y_n - x| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - x\right|$$

$$= \frac{1}{n}\left|(x_1 - x) + (x_2 - x) + \ldots + (x_n - x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(|x_1 - x| + |x_2 - x| + \ldots + |x_{n_0} - x|\right) + \frac{1}{n}(|x_{n_{0+1}} - x| + \ldots + (|x_n - x|)$$

$$\leq \frac{M}{n} + \frac{1}{n}(n - n_0)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$.

b) Do $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{x} \text{ (do kết quả câu a)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x$.

Bài 19. Cho dãy dương $\{x_n\}$ hội tụ về $x > 0$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} = x$.

Giải

Theo BĐT Cauchy:

$$z_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = y_n.$$

Theo bài 18: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x$

$\Rightarrow$ Theo tính chất kẹp ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} = x$.

Bài 20. a) Cho dãy dương $\{x_n\}$. Chứng minh rằng:

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = x > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = x$.

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Giải

a) Lấy: $y_1 = x_1$, $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}$, $y_3 = \dfrac{x_3}{x_2}$,..., $y_n = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = x > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n} = x \text{ (do kết quả bài 19)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = x.$$

b) với $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $n \in N$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = e \text{ (do kết quả câu a)}$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Chú ý: Người ta đã chứng minh được rằng $\left\{a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Do đó, nó có giới hạn. Giới hạn này là số vô tỷ được ký hiệu là e và gọi là hằng số Euler. Như vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Một giá trị gần đúng của e là: 2,718.281.828.459.045.

Bài 21. Tính các tổng sau đây:

a) $M = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$

b) $N = 2 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{25} + \dfrac{2}{125} + \ldots$

Giải

a) Ta có: $a_1 = 1$, $q = -\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow M = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

b) Ta có: $a_2 = 2$, $q = \dfrac{1}{5}$

$$\Rightarrow N = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Bài 22. Tìm phân số sinh ra số phân tuần hoàn trong các trường hợp sau:

a) A = 0,21 21 21...

b) B = 1, 14 3143 143...

c) C = 2,15 15 15...

Giải

a) A = 0,21 21 21...

$= 0{,}21 + 0{,}0021 + 0{,}000021 + \ldots$

$= 21.10^{-2} + 21.10^{-4} + 21.10^{-6} + \ldots$

$$= \frac{21.10^{-2}}{1-10^{-2}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

b) B = 1,143 143 143...

$= 1 + 0{,}143 + 0{,}000143 + 0{,}000000143 + \ldots$

$= 1 + 143\,(10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + \ldots)$

$$= 1 + 143\,\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}$$

$$= 1 + \frac{143}{999} = \frac{1142}{999}.$$

c) C = 2,15 15 15...

$= 2 + 0{,}15 + 0{,}0015 + 0{,}000015 + \ldots$

$= 2 + 15(10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \ldots)$

$$= 2 + 15.\,\frac{10^{-2}}{1-10^{-2}} = 2 + \frac{15}{99} = \frac{213}{99}.$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2008n}{3n^2-7n+2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-(-1)^n.n}{n^2+(-1)^{n+3}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n+a^{n-1}+\ldots+a+1}{b^n+b^{n-1}+\ldots+b+1}$ $\left(0<a<b<\dfrac{1}{2008}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+2^{n+1}}{2^n+5.3^n}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2.1^2+3.2^2+\ldots+(n+1).n^2}{4n^4}$.

Đáp số:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) 3 c) $\dfrac{1-b}{1-a}$ **d) 1** **e) 0** **f)** $\dfrac{1}{4}$.

2. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\right)$

Đáp số: a) 0 b) $+\infty$.

3. Cho phương trình: $x^n+x^{n-1}+\ldots+x-1=0$.

Chứng minh rằng với mỗi $n\in\mathbb{N}$ **thì phương trình có nghiệm duy** nhất $x_n>0$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

(Đề thi chính thức Olymlic 30 – 4)

Đáp số: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

4. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định **bởi:**

$$\begin{cases}x_1=3\\x_{n+1}=x_n^2-3x_n+4\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng: $\{x_n\}$ không **bị chặn trên.**

b) Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, trong đó: $y_n = \dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n - 1}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

5. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi công thức:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)\ldots(i+2008)},\ n \in \mathbb{N}.\ \text{Tính } \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

6. Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0 < a_n < 1 \\ a_{n+1}(1 - a_n) > \dfrac{1}{4} \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

7. Chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, với $a_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ số } a > 0}$.

b) $1 < b_n < \dfrac{3}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, với $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

8. a) Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n + d^n + e^n}$ (với a, b, c, d, e $\in (0, +\infty)$)

Đáp số: **max{a, b, c, d, e}**

b) Cho dãy số không âm $\{x_n\}$ hội tụ. Chứng minh rằng:

Đáp số: **a) $x \geq 0$**

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2008]{x_n} = \sqrt[2008]{x}$.

Hướng dẫn: **a)** Dùng phản chứng.

b) Trước hết chứng minh BĐT:

$$\left|\sqrt[2008]{x} - \sqrt[2008]{y}\right| \leq \sqrt[2008]{|x-y|},\ \forall x, y \geq 0.$$

9. Tìm phân số sinh ra số thập phân tuần hoàn trong các trường hợp **sau đây:**

a) A = 2, 135 125 135... b) B = 0,25 25 25...

c) C = 3,14 14 14... d) D = 21, 21 21 21...

Đáp số: **a) A =** $\dfrac{79}{37}$ b) B = $\dfrac{25}{99}$

c) C = $\dfrac{311}{99}$ d) D = $\dfrac{700}{33}$.

§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Số $L \in R$ được gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần tới x_0 nên mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, b) \setminus \{x_0\}$ hội tụ tới x_0 thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới L.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Chú ý:

- $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ (với C là hằng số)
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ (với g là một đa thức).

2. Một số định lý căn bản:

Định lý 1:

Cho f, g là các hàm số xác định trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$ và đều có giới hạn hữu hạn khi x dần tới x_0. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] = \alpha \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (với $\alpha, \beta \in R$ là các hằng số cho trước)
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) . \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (nếu $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$)

Định lý 2: Cho hàm số f xác định trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$ và có giới hạn hữu hạn khi x dần tới x_0. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right|$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$ (nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$)

Định lý 3 (Tính chất kẹp)

Nếu các hàm số f, g, h xác định trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \in R \end{cases}$$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Hệ quả (của định lý 3)

Nếu f, g xác định (a, b) \ $\{x_0\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} |f(x)| \le g(x), \ \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$$

Thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Định lý 4:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Tổng quát: Nếu hàm số φ xác định trên $(-\delta, \delta)\setminus\{0\}$ ($\delta > 0$) và $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos \varphi(x)}{\varphi^2(x)} = \dfrac{1}{2}$.

3. Mở rộng khái niệm giới hạn của hàm số

3.1 • Giới hạn bên phải:

Cho hàm số f xác định trên (x_0, b). Số $L \in R$ được gọi là giới hạn bên phải của hàm số f khi x dần tới x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (x_0, b)$ hội tụ tới x_0 thì dãy $\{f(x)\}$ hội tụ tới L.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

• Giới hạn bên trái:

Cho hàm số f xác định trên (a, x_0). Số $L \in R$ được gọi là giới hạn bên trái của hàm số f khi x dần tới x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, x_0)$ hội tụ tới x_0 thì dãy $\{f(x)\}$ hội tụ tới L .

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

• Định lý 5:

Cho hàm số f xác định trên (a, b) \ $\{x_0\}$ và $L \in R$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

3.2 • Giới hạn tại vô cực

- Cho hàm số f xác định trên $(a, +\infty)$. Số $L \in R$ gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần tới $+\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, +\infty)$ dần tới $+\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới L.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

- Cho hàm số f xác định trên $(-\infty, b)$. Số $L \in R$ gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần tới $-\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (-\infty, b)$ dần tới $-\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới L.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

- Cho hàm số f xác định trên R. Số $L \in R$ gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần tới ∞ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset R$ dần tới ∞ thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ tới L.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$.

Chú ý: các định lý 1, 2, 3 vẫn còn đúng khi ta thay $x \to x_0$ bởi (một trong):

$$x \to x_0^+,\ x \to x_0^-,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty,\ x \to \infty.$$

3.3. *Hàm số dần tới vô cực*

3.3.1. Cho hàm số f xác định trên $(a, b)\backslash\{x_0\}$

- Ta nói f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, b)\backslash\{x_0\}$ hội tụ tới x_0 thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $+\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần tới x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, b)\backslash\{x_n\}$ dần tới hội tụ với x_0 thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $-\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là ∞ khi x dần tới x_0 nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, b)\backslash\{x_0\}$ hội tụ tới x_0 thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới ∞.

  Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

3.3.2. Cho hàm số f xác định trên $(a, +\infty)$

- Ta nói f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới $+\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, +\infty)$ dần tới $+\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $+\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần tới $+\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, +\infty)$ dần tới $+\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $-\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là ∞ khi x dần tới $+\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (a, +\infty)$ dần tới $+\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới ∞.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$.

3.3.3. Cho hàm số f xác định trên $(-\infty, b)$

- Ta nói f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới $-\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (-\infty, b)$ dần tới $-\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $+\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần tới $-\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (-\infty, b)$ dần tới $-\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $-\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là ∞ khi x dần tới $-\infty$ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset (-\infty, b)$ dần tới $-\infty$ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới ∞.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

3.3.4. Cho hàm số f xác định trên R

- Ta nói f có giới hạn là $+\infty$ khi x dần tới ∞ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset R$ dần tới ∞ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $+\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là $-\infty$ khi x dần tới ∞ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset R$ dần tới ∞ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới $-\infty$.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

- Ta nói f có giới hạn là ∞ khi x dần tới ∞ nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset R$ dần tới ∞ thì dãy $\{f(x_n)\}$ dần tới ∞.

  Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Định lý 6: Cho hàm số f xác định trên $(a, b) \setminus \{x_0\}$

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Nếu $\begin{cases} f(x) \neq 0, \ \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Chú ý: Định lý 6 vẫn còn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi (một trong) $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Định lý 7: Cho $n \in N$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n-1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^{2n} = +\infty$.

B/ BÀI TẬP (CHỦ YẾU LÀ CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$)

Bài 1. Tính giới hạn của:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3 + 3x - 1)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+1}$

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3 + 3x - 1) = 2(-1)^3 + 3(-1) - 1 = -6.$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+1} = \dfrac{2+3}{2^2+1} = 1$

Bài 2. Tính các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x}$ *(ĐH Bách khoa Hà Nội, năm 2001)*

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ *(ĐH Hàng hải, năm 2001)*

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{2x^2+1}}$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{4}{1+\sqrt{2x^2+1}} = -4.1^2.\frac{1}{2} = -2.$$

b) Ta có: $\cos^4 x - \sin^4 x - 1 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) - 1$

$= \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = (\cos^2 x - 1) - \sin^2 x$

$= -2\sin^2 x.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2 x}{x^2}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$

$$= -2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = -2.1^2.2 = -4.$$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1} = -4.$

Bài 3. (Dạng vô định $\frac{0}{0}$). Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-(x^2+x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{-0}{2}=0.$$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt[3]{1-x})[1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}]}{x[1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x)}{x[1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}=\frac{1}{3}$$

c) Ta có: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}{x}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x+1}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{(1+x)^2}}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Bài 4. (Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$). Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2-2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3.$$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2.x^2.\left(7+\dfrac{2}{x}\right)^2}{x^4\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(7+\dfrac{2}{x}\right)^2}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4} = \frac{1^2.7^2}{2^4} = \frac{49}{16}.$$

c) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} = 1.$

Bài 5. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-4x}-x]$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}]$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[[\sqrt{x^2-4x}-x$ (Dạng vô định $\infty-\infty$) $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+1} = \frac{-4}{1+1} = -2.$$

b) Ta chia 2 trường hợp:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\,] = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+1}-x+x-\sqrt[3]{x^3-1}\,]$ (Dạng $\infty-\infty$)

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}\right]$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Bài 6. (Dùng tính chất kết hợp)

Tìm giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^{2008}2x+\cos^{2009}2x}{x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\dfrac{5}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

Giải

a) Ta có:

$$\left|\frac{\sin^{2008}2x+\cos^{2009}2x}{x^2+x+1}\right| \le \frac{\left|\sin^{2008}2x\right|+\left|\cos^{2009}2x\right|}{x^2+x+1} \le \frac{2}{x^2+x+1}$$

Mà: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+x+1} = 0$

Nên: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^{2008}2x+\cos^{2009}2x}{x^2+x+1} = 0.$

b) Ta có: $\left|x^2\sin\dfrac{5}{x}\right| \le x^2,\ \forall x \ne 0.$

và $\lim\limits_{x\to0}x^2 = 0$

Nên $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\dfrac{5}{x}\right) = 0.$

c) Ta có: $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|},\ \forall x \ne 0$

Mà $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0.$

Nên: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0.$

Bài 7. (Dạng vô định $\frac{0}{0}$)

Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$ $(a \neq 0)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin 2x}$

(Đại học Quốc Gia Hà Nội, năm 2000)

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} + \dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\tan a + \tan x}{1 - \tan a.\tan x}.\dfrac{\tan a - \tan x}{1 + \tan a.\tan x} - \tan^2 a}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\tan^2 a - \tan^2 x) - \tan^2 a(1 - \tan^2 a.\tan^2 x)}{x^2(1 - \tan^2 a.\tan^3 x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x(\tan^4 a - 1)}{x^2(1 - \tan^2 a.\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2.\frac{\tan^4 a - 1}{1 - \tan^2 a.\tan^2 x}$$

$$= 1.\left(\tan^4 a - 1\right) = \tan^4 a - 1.$$

c) Ta có: $\dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x+1} - 1\right) - \left(\sqrt[3]{x^2+1} - 1\right)}{\sin x}$$

$$= \frac{2x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\sin x} - \frac{x^2}{\left[1+\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right]}.\sin x$$

Vậy: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} = 1\left(\dfrac{2}{2}-0\right) = 1$

d) Đặt $t = x - \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = t + \dfrac{\pi}{6}$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{\sqrt{3}-2\cos(t+\frac{\pi}{6})}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos t+\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sqrt{3}(1-\cos t)+\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}}{2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}} = 1$$

Bài 8. (Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$)

Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

Giải

a) Đặt: $1 + x = y^6$ $(y \geq 0)$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^3-1}{y^2-1}$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

b) Đặt: $y = \sqrt[n]{1+x}$ $(y \geq 0$ với $|x| \leq 1) \Rightarrow x = y^n - 1.$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{y^n-1}$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-1}+\ldots+y+1)}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+y+1} = \frac{1}{n}.$$

Bài 9. (Dạng vô định $\infty - \infty$)

Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right).$$

Giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}+\frac{2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}+\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right) = 2.$$

Bài 10. Chứng minh rằng hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, x > 0 \\ x\cos\frac{1}{x}, x < 0 \end{cases}$$

không có giới hạn nên phải tại 0 nhưng có giới hạn bên trái tại 0.

Giải

- Ta chọn 2 dãy số: $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $b_n = \frac{1}{2n\pi+\pi}$

thì a_n, $b_n \to 0$ (khi $n \to +\infty$)

Nhưng $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos 2\pi = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(2n\pi+\pi) = -1 \end{cases}$

Như vậy: Giới hạn bên phải của hàm f tại 0 không tồn tại.

- Hơn nữa: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x\cos\frac{1}{x} = 0$

(vì $\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \le |x|$, $\forall x \ne 0$).

Bài 11. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$

Giải

a) Ta có: $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

$$= \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} - \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin x^2}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x\left(1 + \sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x}\right)} - \frac{1 - \cos x}{\sin^2(1 + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2 x(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} - \frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2 x(1 + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})} - \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}(1 + \sqrt{\cos x})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\pi}{2} - x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} = 1.$$

Bài 12. (Dùng tính chất kẹp)

Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\sqrt{x + 1} - \sin\sqrt{x}\right)$.

Giải

a) Ta có: $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right| \le \frac{1}{x}\ \forall x > 0,$

và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$

Nên: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

b) Ta có: $\left|\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right| = \left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$

$$\le 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \le 2\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(Vì $|\sin y| \le |y|, \forall y \in \mathbb{R}$)

Hơn nữa: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = 0.$

Nên: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = 0.$

Bài 13. Tìm giới hạn của

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x\right]$$

(với $2 \le n \in \mathbb{N}$ và $a_1, a_2\dots, a_n$ là hằng số).

Giải

Đặt: $f(x) = (x + a_1)(x + a_2)\ \dots\ (x + a_n)$

$= x^n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1} + g(x)$

Trong đó: $g(x)$ là đa thức bậc $\le n - 2$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\dots(x+a_n)} - x\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(a_1 + a_2 + \dots a_n)x^{n-1} + g(x)}{f(x)^{(x)^{\frac{n-2}{n}}} + f^{(x)^{\frac{n-2}{n}}}.x + \dots + f(x)^{\frac{1}{n}}x^{n-2} + x^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{g(x)}{x^{n-2}}}{1 + \left(\frac{f(x)}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{f(x)}{x^n}\right)^{\frac{2}{n}} + \dots + \left(\frac{f(x)}{x^n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\ \left(\text{vì } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n} = 1 \text{ và } \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{n-1}} = 0\right).$$

Bài 14. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x}$ (a hằng số $\in$ R)

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 7x}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cot x - \cot a}{x - a}$ (a hằng số $\in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$).

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(a + x) - \cos(a - x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin a . \sin x}{x} = -2\sin a.$$

(Vì $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$)

b) Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 7x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\dfrac{\sin 5x}{5x} - 7\dfrac{\sin 7x}{7x}}{\dfrac{\sin x}{x}} = 5 - 7 = -2$

c) Ta có: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cot x - \cot a}{a - x}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{\sin(a - x)}{\sin a \sin x}}{x - a} = -\lim_{x \to a} \frac{\sin(a - x)}{a - x} \lim_{x \to a} \frac{1}{\sin a . \sin x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 a}.$$

Bài 15.

Tìm giới hạn của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 - x} - 1}{x}$

Giải

Đặt $t = \sqrt[n]{1 - x}$ ($t \geq 0$ với $|x| \leq 1$)

Khi đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 - x} - 1}{x} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t - 1}{1 - t^n}$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t - 1)}{(1 - t)(1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1})}$$

$$= -\lim_{t \to 1} \frac{1}{1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1}} = \frac{-1}{n}.$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$ *(Đại học Sư Phạm Hà Nội, năm 2000).*

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

(Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội, năm 2007).

Đáp số: a) $\dfrac{7}{12}$ b) $\dfrac{-5}{24}$.

2. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin 2x}$

(Đại học Hàng Hải, năm 1999).

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$

Đáp số: a) 1 b) $-\sqrt{3}$ c) 0

3. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+5}-x)$

d) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}+x\right)$

Đáp số: a) 0 b) 0 c) $\dfrac{5}{2}$

d) $\begin{cases}+\infty (\text{khi } x\to +\infty)\\ \dfrac{1}{2} \quad (\text{khi } x\to -\infty)\end{cases}$

4. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\tan x}$

Đáp số: a) -24 b) 2 c) 2.

5. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[2008]{1+x} - 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ $(2 \le m, n \in \mathbb{Z})$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2007} - 1}{x^{2009} - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

Đáp số: a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{2008}$ c) $\dfrac{m}{n}$

d) $\dfrac{2007}{2009}$ e) $\dfrac{112}{27}$

6. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, với $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}, & x > 0 \\ \dfrac{3}{2}, & x \le 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, với $g(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{x - 2}, & x < 2 \\ 1 - 2x, & x > 2 \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$, với $h(x) = \dfrac{x^3 - 8}{|x - 2|}$, $x \ne 2$.

Đáp số: a) $\dfrac{3}{2}$

b) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

c) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.

7. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{x^n}$ $(2 \le n \in \mathbb{Z})$

Đáp số: a) $\frac{1}{2}$ b) 2^n.

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

- Hàm số f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số f liên tục bên phải tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số f liên tục bên trái tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số f liên tục trên [a, b) $\Leftrightarrow$ f liên tục trên (a, b) và f liên tục bên phải tại a.
- Hàm số f liên tục trên (a, b] $\Leftrightarrow$ f liên tục trên (a, b) và f liên tục bên trái tại b.
- Hàm số f liên tục trên [a, b) $\Leftrightarrow$ f liên tục trên (a, b) và f liên tục bên phải tại a, bên trái tại b.
- Hàm số f gián đoạn tại $x_0 \Leftrightarrow$ f không liên tục tại x_0.

2. Các định lí:

Đính lí 1: Cho hàm số f xác định trên (a, b). Khi đó f liên tục tại $x_0 \in (a, b) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Định lí 2:

Cho các hàm số f, g xác định trên (a, b) khi đó nếu f và g liên tục tại $x_0 \in (a, b)$ thì $\alpha f + \beta g$ (α, β các hằng số $\in \mathbb{R}$), f.g cùng liên tục tại x_0 và $\frac{f}{g}$ cũng liên tục tại x_0 (nếu $f(x_0) \neq 0$).

Định lí 3: Cho hàm số f xác định trên (a, b) và hàm số g xác định trên (c, d). Khi đó, nếu f liên tục tại $x_0 \in (a, b)$ và g liên tục tại $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$ thì $g_0 f$ liên tục tại x_0.

Định lí 4: Nếu hàm số f liên tục trên (a, b) thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên (a, b).

Định lí 5: Nếu hàm số f liên tục trên (a, b) và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho f(c) = 0.

B/ KHẢO SÁT TÍNH LIÊN TỤC

Bài 2. Xét tính liên tục tại $x_0 = 0$ của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{6}, & x = 0 \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2} = f(0)$

$\Rightarrow$ f liên tục tại 0.

b) Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan^2 x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{\tan^2 x(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x})}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^2 \left(1 + \sqrt[3]{\cos x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2}{1^2.3} = \frac{1}{6} = f(0).$$

$\Rightarrow$ f liên tục tại 0.

Bài 2. Cho $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ A\sin x + B, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Tìm A, B để hàm số liên tục tại các điểm $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

Giải

- f liên tục tại $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (A\sin x + B) = A + B$$

$$\Leftrightarrow A + B = 0 \ (1)$$

- f liên tục tại $-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(-\frac{\pi}{2})$

$$\Leftrightarrow B - A = 2 \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$

Bài 3. Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1-x}, & -3 \le x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng f liên tục trên $(-3, +\infty)$.

Giải

Dễ thấy rằng:

$\dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1-x}$ xác định trên $(-3, +\infty)\backslash\{1\}$ nên liên tục trên $(-3, +\infty)\backslash\{1\} \Rightarrow$ f liên tục đến $(-3, +\infty)\backslash\{1\}$. (1)

Vì vậy, ta chỉ cần xét sự liên tục của f tại 1.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1-x}$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x} + \frac{2-\sqrt[3]{3x+5}}{1-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x+3-4}{\left(\sqrt{x+3+2}\right)(1-x)} + \frac{8-3x-5}{\left(4+\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{(3x+5)^2}\right)(1-x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{4+2\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{(3x+5)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)$$

$$= \frac{3}{4+4+4} - \frac{1}{4} = 0 = f(1)$$

⇒ f liên tục tại 1 (2)

Từ (1) và (2) ⇒ f liên tục trên $(-3, +\infty)$

Bài 4. Cho hàm số f liên tục trên (0, 1) và f(0) = f(1). Xét trên hàm số g xác định bởi:

$$g(x) = \begin{cases} f(2x), & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ f(2x-1), & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm số g liên tục trên (0, 1).

Giải

Ta có: $h(x) = 2x$, $k(x) = 2x - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nên $g(x) = \begin{cases} (f_0h)(x), 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ (f_0k)(x), \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ liên tục trên $(0, 1)\backslash\{\dfrac{1}{2}\}$ (1)

Hơn nữa:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} (f_0k)(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(2x-1) = f(0) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} (f_0h)(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(2x) = f(1) = g(\dfrac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} g(x) = g(\frac{1}{2})$$

$\Leftrightarrow$ g liên tục tại $\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ g liên tục trên (0, 1).

Bài 5. Cho hàm số đồng biến trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng: f liên tục trên R.

Giải

Ta có: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- Cho $y = 0 \Rightarrow f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0.$

- Cho $y = -x \Rightarrow 0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$
- Cho $y = x \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$

+ Giả sử: $f(k.x) = kf(x)$ $(k \in \mathbb{N})$

+ Khi đó:
$$\begin{aligned} f((k + 1)x) &= f(kx + x)\\ &= f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x)\\ &= (k + 1) f(x). \end{aligned}$$

+ Như vậy: $f(nx) = nf(x), \forall \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = nf(\frac{x}{n}), \forall \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ (thay x bởi $\frac{x}{n}$)

$\Rightarrow f(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}f(x), \forall \begin{cases} m, n \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}f(x), \forall \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ (thay x bởi mx)

Cho $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + f(1)}$. Khi đó, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \delta$ thì

$$|f(x) - f(x)| = |f(x)| < \varepsilon$$

Quả vậy:

Với $|x| < \delta$ thì tồn tại m, n ∈ ℕ sao cho $|x| < \frac{m}{n} < \delta$

$$\Rightarrow -\frac{m}{n} < x < \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{m}{n}) < f(x) < f(\frac{m}{n}) \text{ (vì f đồng biến trên } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} f(-1) < f(x) < \frac{m}{n} f(1)$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{n} f(1) < f(x) < \frac{m}{n} f(1)$$

$$\Rightarrow |f(x)| < \frac{m}{n}(1 + f(1)) < \delta(1 + f(1)) = \varepsilon$$

⇒ f liên tục tại 0

Từ đây, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} [f(x) + f(-x_0)] = \lim_{x \to x_0} f(x - x_0)$$

$$= \lim_{y \to 0} f(y)$$

$$= f(0) = 0 \text{ (với } y = x - x_0).$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

⇒ f liên tục trên ℝ

Bài 6. Cho $f: R \to \mathbb{Z}$

$$x \mapsto f(x) = [x]$$

(Với [x] là phần nguyên của x ∈ ℝ).

a) f liên tục bên phải tại n ∈ ℤ.

b) f không liên tục tại n ∈ ℤ.

Giải

a) Với $\varepsilon > 0$, lấy $\delta = \varepsilon$. Khi đó:

Với $0 \le x - n < \delta$ $(x \in \mathbb{R})$ thì

$$-1 \le (x - n) - 1 < [x] - n < \delta$$

$$\Rightarrow 0 \le [x] - n < \varepsilon \quad \Rightarrow |f(x) - n| < \varepsilon$$

$\Rightarrow |f(x) - f(n)| < \varepsilon \Rightarrow$ f liên tục tại bên phải n ∈ ℤ.

b) Với $\varepsilon > 0$ lấy $\delta = \varepsilon$ khi đó:

Với $-\delta < x - n < 0$ ($x \in R$) thì

$$-\delta < x - n < [x] - (n-1) < 1 \Rightarrow -\delta < f(x) - (n-1) \le 0$$

$$\Rightarrow |f(x) - (n-1)| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to n^-} f(x) = n - 1 \ne f(n)$$

$\Rightarrow$ f không liên tục tại $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 7. Cho hàm Dirichlet:

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus Q \end{cases}$$

Chứng minh rằng: D không liên tục tại $\forall a \in \mathbb{R}$.

Giải

- Nếu $a \in Q$ thì tồn tại dãy $\{a_n\} \subset \mathbb{R}\setminus Q$ hội tụ về a, khi đó:

$$\begin{cases} D(a_n) = 0 \\ D(a) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} D(a_n) = 0 \ne 1 = D(a)$$

$\Rightarrow$ D không liên tục tại $a \in Q$.

- Nếu $a \in \mathbb{R}\setminus Q$ thì tồn tại dãy $\{a_n\} \subset Q$ hội tụ về a. Khi đó:

$$\begin{cases} D(a_n) = 1 \\ D(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} D(a_n) = 1 \ne 0 = D(a)$$

$\Rightarrow$ D không liên tục tại $a \in \mathbb{R}\setminus Q$.

Tóm lại D không liên tục tại $\forall a \in \mathbb{R}$.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Xét tính liên tục tại x_0 của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^2 5x}, x \ne 0 \\ \dfrac{1}{7} \qquad x = 0 \end{cases}$ $(x_0 = 0)$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}, x \ne 1 \\ -\pi, \qquad x = 1 \end{cases}$ $(x_0 = 1)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, |x| < 2 \\ 5, x = \pm 2 \\ 3x - 2009, |x| > 2 \end{cases}$

Đáp số: a) f không liên tục tại $x_0 = 0$.

b) f liên tục tại $x_0 = 1$.

c) f không liên tục tại $x_0 = \pm 2$.

2. Định a để các hàm số sau liên tục tại x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, x \le 1 \\ 3 - ax^2, x > 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1)$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2, x \le 2 \\ a_n + 5, x > 2 \end{cases} \quad (x_0 = 2)$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3x + 2} - 2/(x - 2), x > 2 \\ ax + \dfrac{1}{4}, \quad x \le 2 \end{cases} \quad (x_0 = 2)$

Đáp số: a) $a = 1$

b) $a = -1$

c) $a = 0$.

3. Xác định a để các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} (1 - \cos 5x)\cot^2 2008x, x \ne 0 \\ a, \quad x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2.\sin\dfrac{2009}{x}, x \ne 0 \\ a, \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}, x \ne \dfrac{\pi}{3} \\ \tan\dfrac{\pi}{6} + a, \ x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Đáp số: a) $a \in \varnothing$

b) $a = 0$

c) $a \in \varnothing$.

4. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số:

$f(x) = (x^2 - x + 1)/\sin x$.

Đáp số: Các điểm gián đoạn là: $x_0 \in \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2009, x \le 2 \\ \dfrac{x+1}{x^2 - 3x}, x > 2 \end{cases}$$

Đáp số: Các điểm gián đoạn là $x_0 \in \{0, 2, 3\}$.

D/ CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Bài 1. Cho a, b, c, $\in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng, phương trình:

$ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm.

Giải

Xét:

$$f(x) = ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a),\ x \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hơn nữa:

$$\begin{cases} f(0) = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ f(a) = bc(a - b)(a - c) = -bc(a - b)(c - a) \\ f(b) = ca(b - c)(b - a) = -ca(a - b)(b - c) \\ f(c) = ab(c - a)(c - b) = -ab(b - c)(c - a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a)f(b)f(c) = -(abc(a - b)(b - c)(c - a))^2 \le 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)f(a) \le 0 \\ f(0)f(b) \le 0 \\ f(0)f(c) \le 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình f(x) = 0 luôn có nghiệm.

Bài 2. Cho m > 0 và $\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{n} = 0$ (1)

Chứng minh rằng: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\in (0, 1)$.

Giải

Xét $f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in R$.

Ta có:

- f liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $\begin{cases} f(0) = c \\ f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right) = a\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)^2 + b\dfrac{m+1}{m+2} + c \end{cases}$

$$= \frac{(m+1)^2}{m+2}\underbrace{\left(\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m}\right)}_{0} + c\left(1 - \frac{(m+1)^2}{m(m+2)}\right)$$

$$= -\frac{c}{m(m+2)}$$

- Nếu c = 0 thì $f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right) = 0$.

$\Rightarrow x_0 = \dfrac{m+1}{m+2} \in (0, 1)$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

- Nếu $c \neq 0$ thì $f(0)\, f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right) = \dfrac{-c^2}{m(m+2)} < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\in \left(0, \dfrac{m+1}{m+2}\right) \subset (0, 1)$

Chú ý: Trong (1), lấy m = 1, ta có: $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = 0$

$\Leftrightarrow 2a + 3b + 6c = 0$.

Với giả thiết này thì theo kết quả bài 2 phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\in (0, 1)$

Đây chính là câu IIb) trong đề thi tuyển sinh Cao đẳng Tài chính Kế toán IV. TpHCM năm 2004.

Bài 3. Cho $\begin{cases} a \neq 0 \\ 2a + 6b + 19c = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc $(0, \dfrac{1}{3})$.

Giải

Xét $f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in \mathbb{R}$.

Ta có: f liên tục trên $\mathbb{R}$.

- $\begin{cases} f(0) = c \\ f(\frac{1}{3}) = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{9}(a + 3b + 9c) \end{cases}$

$\Rightarrow 18\ f(\frac{1}{3}) = 2a + 6b + 18c$

$\Rightarrow f(0) + 18(\frac{1}{3}) = 2a + 6b + 19c = 0$

$\Rightarrow f(0) = -18f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow f(0)f(\frac{1}{3}) = -18[f(\frac{1}{3})]^2 \leq 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\in (0, \frac{1}{3})$.

Bài 4. Chứng minh rằng các phương trình sau đây luôn có nghiệm:

a) $\sin x + 1 - x = 0$.

b) $\cos x + m.\cos 2x = 0$ (với m là tham số).

c) $(m^2 + 2m + 3)x^4 + 2x - 2 = 0$ (với m là tham số).

Giải

a) Xét $f(x) = \sin x + 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \\ f(0) = 1 > 0 \\ f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2} < 0 \end{cases}$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\in (0, \frac{3\pi}{2})$.

b) Xét $f(x) = \cos x + m\cos 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \\ f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ f(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{cases}$

Nên phương trình (x) = 0 có nghiệm $\in(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

c) Xét $f(x) = (m^2 + 2m + 3)x^4 + 2x - 2, x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \\ f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = m^2 + 2m + 3 = (m+1)^2 + 2 > 0 \end{cases}$

Nên phương trình f(x) = 0 có nghiệm $\in (0, 1)$.

Bài 5. Chứng minh rằng phương trình:

$a_0x^{2n+1} + a_1.x^{2n} + ... + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$ $(n \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0)$ luôn có nghiệm.

Giải

Xét $f(x) = x^{2n+1} + \frac{a_1}{a_0}x^{2n} + ... + \frac{a_{2n}}{a_0}x + \frac{a_{2n+1}}{a_0}, x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

- f liên tục trên $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_1 > 0$ sao cho $f(x_1) > 0$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $x_2 < 0$ sao cho $f(x_2) < 0$

Do đó: $f(x_1)f(x_2) < 0$ (đpcm).

Bài 6. Cho hàm số: f [a, b] → [a, b] liên tục.

Chứng minh rằng: f(x) = x có nghiệm $\in [a, b]$.

Giải

Xét: $g(x) = x - f(x), x \in [a, b]$.

Ta có: $\begin{cases} g \text{ liên tục trên } [a, b] \\ g(a) = a - f(a) \leq 0 \\ g(b) = b - f(b) \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow g(a)\, g(b) \leq 0 \Rightarrow$ Tồn tại $C \in [a, b]$ sao cho $g(c) = 0$

$\Leftrightarrow f(c) = 0 \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 7. Cho f: [a, b] → [a, b] thỏa $|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in ((a, b),$ $x \neq y$.

a) Chứng minh rằng: f liên tục trên [a, b].

b) Chứng minh rằng: f(x) = x có nghiệm duy nhất $\in [a, b]$.

Giải

a) $\forall x_0, x \in [a, b]$, ta có

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ f liên tục trên $[a, b]$

b) Theo bài 6 thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho:

$$f(c) = c$$

Hơn nữa, nếu có $d \in [a, b] \setminus \{c\}$ sao cho $f(d) = d$

Thì $|f(c) - f(d)| < |c - d|$

$\Rightarrow |c - d| < |c - d|$

$\Rightarrow$ Vô lí.

Vậy phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $\in [a, b]$.

Bài 8. Cho f liên tục trên $[0, 1]$ có $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng: với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta luôn tìm được $c_n \in [0, 1]$ sao cho: $f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n})$

Giải

Xét $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, $x \in [0, 1]$ $(n \in \mathbb{N})$

Khi đó:

- g liên tục trên $(0, 1)$
- $g(0) + g(\frac{1}{n}) + g(\frac{2}{n}) + \ldots + g(\frac{n-1}{n})$

$$= [f(\frac{1}{n}) - f(0)] + [f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n})] + \ldots + [f(1) - f(\frac{n-1}{n})]$$

$$= f(1) - f(0) = 0.$$

$\Rightarrow$ Tồn tại $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ sao cho $g(\frac{i}{n}) \leq 0 \leq g\left(\frac{j}{n}\right)$

$\Rightarrow$ Tồn tại $c_n \in [0, 1]$ sao cho $g(c_n) = 0$

$\Leftrightarrow f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n})$.

Bài 9. Cho f liên tục trên $[a, b]$ và $\alpha, \beta > 0$. Chứng minh rằng: tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$ (1)

Giải

Cách 1:

* Nếu f là hàm hằng thì (1) luôn đúng.

* Nếu f không là hàm hằng thì

Tồn tại x_1, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 + x_2$ sao cho

$$\begin{cases} m = f(x_1) = \min\{f(x) / x \in [a,b]\} \\ M = f(x_2) = \max\{f(x) / x \in [a,b]\} \end{cases}$$

Khi đó: $(\alpha + \beta)_m \leq \alpha f(a) + \beta f(b) \leq (\alpha + \beta)M$.

Xét $g(x) = (\alpha + \beta) f(x) - \alpha f(a) - \beta f(b)$, $x \in [a, b]$ thì

- g liên tục trên [a, b]
- $g(x_1) = (\alpha + \beta)m - \alpha f(a) - \beta f(b) \leq 0$
- $g(x_2) = (\alpha + \beta)M - \alpha f(a) - \beta f(b) \geq 0$

Suy ra tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho: $g(c) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

Cách 2:

Xét $g(x) = (\alpha + \beta)f(x) - \alpha f(a) - \beta f(b)$, $x \in [a, b]$.

Khi đó:

- g liên tục trên [a, b].
- $g(a) = (\alpha + \beta)f(a) - \alpha f(a) - \beta f(b) = \beta[f(a) - f(b)]$
- $g(b) = (a + \beta)f(b) - \alpha f(a) - \beta f(b) = \alpha[f(b) - f(a)]$

Suy ra: $g(a)g(b) = -\alpha\beta[f(a) - f(b)]^2 \leq 0$

Điều này chứng tỏ tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$g(c) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

Bài 10. Chứng minh rằng phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

Giải

Xét $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó:

- f liên tục trên R
- $f(-2).f(-1) = (-3).(5) < 0$

- $f(-1).f(1) = (5).(-3) < 0$.
- $f(1).f(2) = (-3).(5) < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, thỏa $-2 < x_2 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

Bài 12. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ có nghiệm $x_0 \in \left(\sqrt[7]{12}, 2\right)$.

Giải

Xét $f(x) = x^4 - x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

$$\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \\ f(1) = 1 - 1 - 3 = -3 < 0 \\ f(2) = 16 - 2 - 3 = 11 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)$ có nghiệm $x_0 \in (1, 2)$ (1)

Khi đó $x_0^4 = x_0 + 3 \geq 2\sqrt{3x_0}$

$$\Rightarrow x_0^8 \geq 12x_0$$

$$\Leftrightarrow x_0 \geq \left(\sqrt[7]{12}\right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x_0 = 3$ (vô lí)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in \left(\sqrt[17]{12}, 2\right)$

Bài 13. a) Giải phương trình: $2x - 1 = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$.

b) Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x + 9}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Giải

a) Pt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ (2x-1)^2 = x^2 - 2x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 9 \end{cases}$

b) Theo câu a, ta có $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Hơn nữa: $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \\ f(0) = -4 < 0 \\ f(3) = 5 - 2\sqrt{3} > 0 \end{cases}$

Nên: • $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

• $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Bài 14. Tìm m để phương trình:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Giải

Giả sử $f(x) = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1 < -1 < x_2 < x_3)$

Khi đó: $f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)$

$$= -\underbrace{(1 + x_1)}_{< 0}\underbrace{(1 + x_1)}_{> 0}\underbrace{(1 + x_1)}_{> 0} > 0$$

$\Rightarrow -1 - 3 + 2 - 2m + m - 3 > 0$

$\Rightarrow m < -5$.

Ngược lại, với $m < -5$

Khi đó: $\begin{cases} f(-1) = -(5 + m) > 0 \\ f(0) = m - 3 < 0 \end{cases}$

Hơn nữa: $\begin{cases} f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

Tồn tại $a < -1$ và $b > 0$ sao cho $f(a) < 0 < f(b)$

$\Rightarrow \begin{cases} f(a)f(-1) < 0 \\ f(-1)(f(0) < 0 \\ f(0)f(b) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sao cho $\begin{cases} a < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < b \\ f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0 \end{cases}$

Vậy: $m < -5$ là điều kiện cần và đủ để phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

E/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $(x + 1)^4 - x - 4 = 0$

b) $p(x - a)(x - c) + q(x - b)(x - d) = 0$ $(a \le b \le c \le d)$

c) $a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$

d) $\cos 4x + a\cos 2x + b\sin 2x = 0$.

e) $\sin x + m\sin 2x = 0$ (a, b, c, d, p, q, m là các hằng số cho trước).

2. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có 3 nghiệm phân biệt:

a) $2(x + 1)^2 - 6x - 5 = 0$

b) $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$.

3. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có tít nhất hai nghiệm phân biệt $\in (-1, 1)$: $4x^4 - 2x^2 - x - 3 = 0$

4. Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng: nếu phương trình $f(x) = x + 2008$ vô nghiệm thì phương trình $f[f(x)] = x + 2008$ cũng vô nghiệm.

5. Cho $2a + 3b + 9c = 0$.

Chứng minh rằng:

a) $c^2 \le \dfrac{52}{81}(a^2 + b^2)$.

b) Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm $\in (0, 1)$.

6. Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$ và $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{2009} < b$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2009})].$$

7. Cho hàm số f liên tục trên $[-1, 1]$.

Chứng minh rằng phương trình $x^2[f(x)]^2 - 2f(x) + x = 0$ có nghiệm $\in [-1, 1]$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n-1)(3n++11)(6n-2)}{3n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+3.5^n-4^n}{4^n+5^n}$

Đáp số: a) A. 15 B. 13 C. 14 D. 12

b) A. 3 B. 5 C. 7 D. 9.

2. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$

Đáp số: a) A. 7 B. 0 C. 8 D. 3

b) A. $\dfrac{3}{4}$ B. $\dfrac{4}{3}$ C. 1 D. 2.

3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n},\ n\ge 1 \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Đáp số: A. $\dfrac{-5}{12}$ B. $\dfrac{5}{12}$ C. 2 D. $\dfrac{5}{24}$.

4. Tìm $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(2x+10)(3x+2)(4x+5)}{3x^2+2x+71}$

Đáp số: A. 5 B. 7 C. 6 D. 8.

5. Cho $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x-2}{x+1},\ x\neq -1 \\ 2m,\ x=-1\end{cases}$

Tìm m để f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đáp số: A. m = 0 B. m = 1 C. m = 2 D. m = 3.

6. Trên khoảng (–2, 2), phương trình $2x^3-6x+1=0$ có mấy nghiệm? (Biết rằng phương trình bậc ba có số nghiệm tối đa là 3).

Đáp số: A. 0 B. 1 C. 2 D. 3.

7. Tìm $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2} - 2\cos n}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$

Đáp số: A. $\dfrac{1}{2008}$ B. $\dfrac{1}{2009}$

C. $\dfrac{1}{2010}$ D. Một đáp số khác.

8. Tính $S = 1 - \tan a + \tan^2 a - \tan^3 a + \ldots \left(\text{với } a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Đáp số: A. $\dfrac{\sqrt{2}\sin a}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}\cos a}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}\cos a}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)}$ D. Tất cả đều sai.

9. Giải phương trình:

$$2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{13}{6} (|x| < 1)$$

Đáp số: A. $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{17}\right\}$ B. $x \in \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{4}\right\}$

C. $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{9}\right\}$ D. $x \in \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$

LỜI GIẢI BÀI TRẮC NGHIỆM
ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. a) Chọn D. Ta có:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n-1)(3n+1)(6n-2)}{3n^3+1}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)\left(3 + \dfrac{1}{n}\right)\left(6 - \dfrac{2}{n}\right)}{3 + \dfrac{1}{n^3}} = \frac{2.3.6}{3} = 12.$$

b) Chọn A.

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+3.5^n-4^n}{4^n+5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+3-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+1}=3$

(vì $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$)).

2. a) Chọn B.

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$

b) Chọn A.

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}$ (vì $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$)).

3. Chọn C.

a) • $n = 1$: $0 < u_1 = \sqrt{2} < 2$

• $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$): Giả sử $0 < u_k < 2$

• $n = k + 1$: Ta có: $0 < u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} < \sqrt{2+2} = 2$

$\Rightarrow 0 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

b) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \dfrac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$

$=\dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy tăng (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Dãy $\{u_n\}$ hội tụ về $u \in [0, 2]$ và $u = \sqrt{2+u}$

Vậy: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = u = 2.$

4. Chọn D.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(2x+10)(3x+2)(4x+5)}{3x^3+2x+71}$

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2+\dfrac{10}{x}\right)\left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(4+\dfrac{5}{x}\right)}{3+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{71}{x^3}}=\frac{2.3.4}{3}=8.$$

5. Chọn A.

- Với $x \neq -1$, ta có $f(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x+1} \Rightarrow$ f liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- Tại $x=-1$, ta có

$$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{x+1}$$

$$=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x-2)=0$$

Do đó f liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=2m \Leftrightarrow m=0$.

6. Chọn D.

Rõ ràng $f(x)=2x^3-6x+1$, $x\in\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hơn nữa:

$$\begin{cases}f(-2)=-3<0\\ f(0)=1>0\\ f(1)=-3<0\\ f(2)=5>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-2).f(0)<0\\ f(0).f(1)<0\\ f(1).f(2)<0\end{cases}$$

Vậy phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa $-2<x_1<0<x_2<1<x_3<2$.

7. Chọn D.

Đặt $t=x-\dfrac{\pi}{4}$, ta có:

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt{2}-2\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin t}=2\lim\limits_{t\to0}\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin t}$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin t} = 4\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}}$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{t}{2}} = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

8. Chọn B.

Do $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 0 < \tan a < 1$

$\Rightarrow q = -\tan a \in (-1, 0)$

$\Rightarrow$ Theo công thức tổng quát của một cấp số nhân lùi vô hạn, ta có:

$$S = 1 - \tan a + \tan^2 a - \tan^3 a + \ldots = \frac{1}{1 + \tan a} = \frac{\cos a}{\sin a + \cos a}$$

$$= \frac{\cos a}{\sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\cos a}{2\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)}$$

9. Chọn C.

Do $|x| < 1$, nên theo công thức tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + \frac{x^2}{1 + x} = \frac{13}{6} \qquad \Leftrightarrow 2x + \frac{x^2}{1 + x} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = \frac{7}{6}(x + 1) \qquad \Leftrightarrow 3x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 + 5x - 7 = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{9} \end{array}\right. \text{(thỏa } |x| < 1\text{).}$$

Chương V

ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

§1. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM VÀ QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Định nghĩa*

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a, b) \ni x_0$.

- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ thì giới hạn này gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$. (hay $y'(x_0)$).

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ thì giới hạn này gọi là đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0^+)$ (hay $y'(x_0^+)$).

$$\boxed{f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ thì giới hạn này gọi là đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0^-)$ (hay $y'(x_0^-)$

$$\boxed{f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên (a, b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a, b).
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên $[a, b)$ nếu nó có đạo hàm liên tục trên (a, b) và có đạo hàm bên phải tại a.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên $(a, b]$ nếu nó có đạo hàm trên (a, b) và có đạo hàm bên trái tại b.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên $[a, b]$ nếu nó có đạo hàm trên (a, b) và có đạo hàm bên phải tại a, đạo hàm bên trái tại b.

  + Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x \in (a, b)$ và $y' = f'(x)$ cũng có đạo hàm tại x. Khi đó ta gọi đạo hàm của y' tại x là đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu y'' (hay $f''(x)$).
  + Đạo hàm (nếu có) của $y'' = f''(x)$ tại x gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y''' (hay $f'''(x)$).

  Một cách tổng quát ta có định nghĩa sau:

  + Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n - 1$ $(n \geq 2)$ tại x, kí hiệu $y^{(n-1)}$ (hay $f^{(n-1)}(x)$).

  Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm tại x thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ (hay $f^{(n)}(x)$)

  $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$ (hay $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$).

2. *Định lý:*

- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 nếu và chỉ nếu $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0. Điều đảo lại không đúng.

  Ví dụ: Xét hàm số $y = f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta có:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} |x| = 0 = f(0) \Rightarrow$ f liên tục tại 0.
- $$\begin{cases} f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$

$\Rightarrow$ f không có đạo hàm tại 0.

Như vậy: Hàm số $y = f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ liên tục tại 0 nhưng không có đạo hàm tại 0.

3. *Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản*

- $(c)' = 0$ (c là hằng số)
- $(x)' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$.

4. *Quy tắc tính đạo hàm*

Cho các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ có đạo hàm tại x. Khi đó

- $(c.u)' = c.u'$ (với c là hằng số)
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'v + uv'$
- $(u.v.w)' = u'vw + uv'w + uvw'$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ (với $u = u(x) \neq 0$)
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

5. *Đạo hàm của hàm số hợp:*

Nếu hàm số $f: (a, b) \to (c, d)$ có đạo hàm tại $x_0 \in (a, b)$ và hàm số $g: (c, d) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm tại $u_0 = f(x_0)$ thì hàm số hợp: $h = gf: (a, b) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm tại x_0 và $h'(x_0) = g'(x_0)\, f'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0)$.

Hệ quả: Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x. Khi đó:

- $(u^n)' = nu^{n-1}.\, u'$ $(n \in \mathbb{N})$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (với $u = u(x) > 0$)

- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ (với $u = u(x) \neq 0$)
- $(\sin u)' = u'\cos u$
- $(\cos u)' = -u'\sin u$
- $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
- $(\cot u)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -u'\,(1 + \cot^2_u)$

(với $u = u(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$)

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = x^3 - 2x$ tại $x_0 = 1$

b) $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 2$

c) $y = f(x) = \sqrt{1-x}$ tại $x_0 = -1$.

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= (1+h)^3 - 2(1+h) + 1 \\ &= (1 + 3h + 3h^2 + h^3) - (2 + 2h) + 1 \\ &= h + 3h^2 + h^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (1 + 3h + h^2) = 1.$$

b) Ta có: $f(2+h) - f(2) = \dfrac{2+h}{1+h} - 3 = \dfrac{-2h}{1+h}$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{-2}{1+h}\right) = -2.$$

c) Ta có: $f(-1+h) - f(-1) = \sqrt{2-h} - \sqrt{2} = \dfrac{-h}{\sqrt{2-h} + \sqrt{2}}$

$$\Rightarrow f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{2-h} + \sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

Bài 2. Tính $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, biết:

$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Giải

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có:

$$+\ f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x-2)^2(x-3)^3 = (1-2)^2(1-3)^3 = -8$$

$$+\ f'(2) = \lim_{h\to 2}(x-1)(x-2)(x-3)^3 = 0$$

$$+\ f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 = 0.$$

Bài 3. Cho $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{\sin 2x}, \text{ nếu } x \neq 0\\ 0, \text{ nếu } x = 0\end{cases}$. Tính f'(0).

(Học viện Bưu chính Viễn thông)

Giải

$$\text{Ta có: } f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x-\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{4x^2+8}-2\right)-\left(\sqrt{8x^2+4}-2\right)}{x-\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4x^2}{\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}+\dfrac{8x^2}{\sqrt{8x^2+4}+2}}{x-\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{8x^2+4}+2}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{4+4+4}-\dfrac{4}{4}}{1} = -\frac{5}{6}.$$

Vậy: $f'(0) = -\dfrac{5}{6}$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x}$ $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số f liên tục $x_0 = 0$, nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Giải

Ta có: • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1+x} = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{1+x} = 0 = f(0) \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$\Rightarrow$ f liên tục tại $x_0 = 0$

• $\begin{cases} f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+x} = 1 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{1+x} = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 + 3x + 2008$

b) $y = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2007$

c) $y = \dfrac{x-1}{x+1} + \tan x + \cot(x^2)$

Giải

a) $y' = 4x + 3$.

b) $y' = 4x^2 - x^2$.

c) $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{2x}{\sin^2(x^2)}$

Chú ý: • $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

• $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$

Trong đó: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha.\delta - \beta\gamma$

(gọi là định thức cấp 2).

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^7 + x)^2$

b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(x) < a$, a là hằng số dương)

c) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Giải

a) $y' = 2(x^7 + x)'(x^7 + x) = 2(7x^6 + 1)(x^7 + x)$

b) $$y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x.\dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

c) $$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = 4\cos^2(4x - 10)$, $x \in \mathbb{R}$.

Tìm miền giá trị của f'.

Giải

Ta có: $f(x) = 4\cos^2(4x - 10) = 2(1 + \cos(8x - 20)$

$\Rightarrow f'(x) = -16\sin(8x - 20)$

Do $g(x) = \sin(8x - 20)$ có miền giá trị là $[-1, 1]$.

Nên f' có miền giá trị là $[-16, 16]$.

Bài 8. Chứng minh rằng các hàm số sau đây có đạo hàm không phụ thuộc vào x:

a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$.

Giải

a) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

$\Rightarrow y' = 0.$

b) $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$

$= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= \sin^6 x + 3\sin^4 x.\cos^2 x + 3\sin^2 x.\cos^4 x + \cos^6 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1.$

$\Rightarrow y' = 0.$

Bài 9. Chứng minh:

a) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall n \in N^*$ (*)

b) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall n \in N^*$.

Giải

a) • Ta có: $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ (*) đúng với n = 1

• n = k: Giả sử (*) đúng, tức là:

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

• n = k + 1: Ta có:

$$(\sin x)^{(k+1)} = [(\sin)^{(k)}]' = \left(\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right)' \text{ (Do giả thiết quy nạp)}$$

$$= \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ (*) đúng với n = k + 1

Vậy: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Bạn đọc tự chứng minh.

Bài 10. Tìm A và B để:

$$y = f(x) = \frac{5x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}, \forall x \neq 1; 2.$$

Từ đó suy ra cách tính $f^{(n)}(x)$ ($n \in \mathbb{N}$).

Giải

• $\forall x \neq 1; 2$. Ta có:

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

$\Leftrightarrow 5x - 3 = A(x - 2) + B(x - 1)$

$$\Leftrightarrow 5x - 3 = (A + B)x - (2A + B)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 5 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 7 \end{cases}$$

• Ta có:

$$(*)\ \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (a \neq 0)$$

Vì vậy:

+ n = 1: Ta có:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)' = \frac{-(ax+b)'}{(ax+b)^2} = \frac{-a}{(ax+b)^2} = \frac{(-1)^1 1!\, a^1}{(ax+b)^{1+1}}$$

$\Rightarrow$ (*) đúng với n = 1

+ n = k: Giả sử (*) đúng với n = k:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!\, a^k}{(ax+b)^{k+1}}$$

+ n = k + 1:

Ta có: $$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k+1)} = \left[\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k)}\right]' = \left(\frac{(-1)^k k!\, a^k}{(ax+b)^{k+1}}\right)'$$

$$= -\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!\, a^{k+1}}{(ax+b)^{k+2}}$$

$\Rightarrow$ (*) đúng với n = k + 1

$\Rightarrow$ (*) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vì vậy: $$f^{(n)}(x) = \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{A(-2)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{B(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n n!\left[\frac{7}{(x-2)^{n+1}} - \frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right]$$

Bài 11. Cho $f(x) = x^4 + 2mx^2 + m$. Tìm m để $f(x) > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$. Với m vừa tìm được, chứng minh:

$$f(x) + f'(x) + f''(x) + f^{(4)}(x) + f'''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ĐH Bách khoa Hà Nội)

Giải

- Nếu $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $f(0) = m > 0$.

Ngược lại, nếu $m > 0$ thì $f(x) = x^4 + 2mx^2 + m > 0, \forall n \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 0$.

- $f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + f^{(4)}(x)$

$$= (x^4 + 2mx^2 + m) + (4x^3 + 4mx) + (12x^2 + 4m) + 24x + 24$$

$$= (x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24) + m(2x^2 + 4x + 5)$$

$$= [x^2(x^2+ 6) + 4x(x^2 + 6) + 4(x^2 + 6)] + 2x^2 + 2m\left(x^2 + 2x + \frac{5}{2}\right)$$

$$= (x^2 + 6)(x + 2)^2 + 2x^2 + 2m\left[(x + 1)^2 + \frac{3}{2}\right] > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Bài 12. Cho $y = \varphi(x)$ là hàm số liên tục tại $x_0 = a$ và $\varphi(a) \neq 0$. Chứng minh rằng hàm số: $y = f(x)|x - a|\ \varphi(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = a$.

Giải

Ta có: • $f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|\ \varphi(a + h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\varphi(a + h) = \varphi(a)$$

• $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|\ \varphi(a + h)}{h}$

$$= -\lim_{h\to 0^-}\varphi(a + h) = -\varphi(a).$$

Mà $\varphi(a) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(a) \neq -\varphi(a)$

$\Leftrightarrow f'(a^+) \neq f'(a^-)$

$\Leftrightarrow$ f không có đạo hàm tại $x_0 = a$.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ tại $x_0 = 1$

b) $y = f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$ tại $x_0 = 2$

c) $y = f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ tại $x_0 = 2$

Đáp số: a) $f'(1) = 1$; b) $f'(2) = \dfrac{4}{9}$; c) $f'(2) = -1$

2. Chứng minh rằng hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$

3. Tìm a, b để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{bx+1}, & x < 0 \\ ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Đáp số: $\begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

4. Cho 2 hàm số $y_1 = \dfrac{1}{4}\cos^4x$ và $y_2 = \sin^4x + \cos^4x$.

a) Chứng minh rằng: $y'_1 = y'_2$.

b) Giải thích kết quả trên.

(CĐ Kinh tế Đối ngoại)

5. Chứng minh rằng:

a) $(\sin^2x)^{(n)} = 2^{n-1}.\sin[2x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}], \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $(\cos^2x)^{(n)} = -2^{n-1}.\sin[2x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}], \forall n \in \mathbb{N}$.

6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - 3x + 7$

b) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + 2008$

c) $y = 2\sin x + 3\cos x$

d) $y = \cos(\sin x)$.

Đáp số: a) $y' = 4x - 3$ b) $y' = \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}$

c) $y' = 2\cos x - 3\sin x$ d) $y' = -\cos x.\sin(\sin x)$.

7. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1001$

b) $y = (3 + 2x^2)^4$.

Đáp số: a) $y' = 6x^2 - 10x + 7$

b) $y' = 16x(3 + 2x^2)^3$.

8. Cho $y = x\sqrt{1 + x^2}$. Tính y''.

Đáp số: $y'' = 3x(x^2 - 1) / (1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}$

9. Cho $y = \begin{cases} (x - 2007)^2(x - 2008)^2, & x \in [2007; 2008] \\ 0, & x \notin [2007, 2008] \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$y' = \begin{cases} 2(x - 2007)(x - 2008)(2x - 4015), & x \in [2007; 2008] \\ 0, & x \notin [2007, 2008] \end{cases}$$

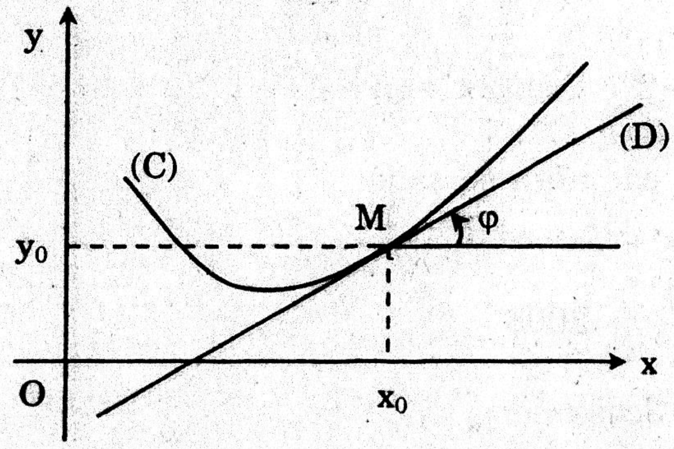
§2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(x_0 - \delta, x_0 = \delta)$, $\delta > 0$ và $M(x_0, y_0) \in (C)$, khi đó:

- Hệ số góc của tiếp tuyến (D) với (C) tại M là $k_{tt} = \tan\varphi = f'(x_0)$
- Phương trình tiếp tuyến (D) là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



B/ BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ có đồ thị (C). Hãy viết phương trình trong các trường hợp sau:

a) Tiếp tuyến tại điểm trên đồ thị có $x_0 = 1$

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{9}x + 9999$

c) Tiếp tuyến phát xuất từ N(0; 5).

Giải

a) Ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1^3 - 3.1 = 5 = 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(1) = 3.1^2 = 0.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = 0(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 3.$$

b) Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm, khi đó:

$$f'(x_0) = 9$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 7 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 3 \end{array}\right.$$

Vậy các phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$\left[\begin{array}{l} y - 7 = 9(x - 2) \\ y - 3 = 9(x + 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 9x - 11 \\ y = 9x + 21 \end{array}\right.$$

c) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp tuyến của tiếp tuyến cần tìm.

Khi đó:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = (x_0^3 - 3x_0 + 5) = (3x_0^2 - 3)(0 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow 3x_0 - x_0^3 = x_0(3 - 3x_0^2)$$

$$\Leftrightarrow 3x_0 - x_0^3 = 3x_0 - 3x_0^3$$

$$\Leftrightarrow x_0^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = 5.$$

Vậy tiếp tuyến cần tìm: $y = 5 - 3(x - 0)$

$$\Leftrightarrow y = -3x + 5.$$

Bài 2. Cho $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) có hệ số góc là -1.

Giải

Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm khi đó:

$$f'(x_0) = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 - 4 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \end{array}\right.$$

- Tại $M(0; -4)$ tiếp tuyến có phương trình là:

$$y + 4 - 1(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = -x - 4$$

- Tại $M(2, 2)$ tiếp tuyến có phương trình là:

$$y - 2 = -1\,(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 4$$

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 2}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng tại các giao điểm của (C) với trục hoành các tiếp tuyến với (C) vuông góc với nhau.

Giải

Ta có: $y' = f'(x) = \frac{-6x^2 + 16x + 6}{4(x^2 + 1)^2}$

Đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-2, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Tại A thì $f'(-2) = \frac{1}{2}\,\frac{-24 - 32 + 6}{4\,(25)} = -\frac{1}{2}$

- Tại B thì $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2} + 8 + 6}{4\left(\frac{25}{16}\right)} = 2$

$$\Rightarrow f'(-2)\,.f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Vậy các tiếp tuyến tại A và B vuông góc nhau.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ (C)

a) Chứng minh rằng, nếu đồ thị (C) của hàm số cắt Ox tại điểm có hoành độ $x = x_0$ thì hệ số góc tiếp tuyến tại điểm đó là $k = \dfrac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt Ox tại hai điểm phân biệt và hai tiếp tuyến tại đó vuông góc với nhau.

Giải

a) Gọi $M(x_0, 0)$ là các giao điểm của (C) và Ox. Khi đó, hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$f'(x_0) = \frac{(2x_0 - 2m)(x_0 + m) - (x_0^2 - 2mx_0 + m)}{(x_0 + m)^2}$$

$$= \frac{(2x_0 - 2m)(x_0 + m)}{(x_0 + m)^2}$$

(vì $M \in (C) \cap Ox \Rightarrow x_0^2 - 2mx_0 + m = 0$)

Vậy: $f'(x_0) = \dfrac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là:

$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0.$$

Do đó (C) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - m > 0 \\ m^2 + 2m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ m \neq 0 \\ m \neq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ 0 > m \neq -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Lúc này:

$$f'(x_A)\,f'(x_B) = \frac{2x_A - 2m}{x_A + m} \cdot \frac{2x_B - 2m}{x_B + m} = \frac{4\left[2x_Ax_B - m(x_Ax_B) + m^2\right]}{x_A + x_B + m(x_A + x_B) + m^2}$$

$$= \frac{4(m - 2m^2 + m^2)}{m + 2m^2 + m^2} = -1.$$

$\Leftrightarrow -4m + 4m^2 = 3m^2 + m \quad \Leftrightarrow m^2 - 5m = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 0 \end{array}\right. \text{(loại)}$$

$\Leftrightarrow$ m = 5 là giá trị cần tìm.

Bài 5. Cho (C): $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2}$. Gọi (D) là tiếp tuyến với (C) tại M có hoành độ x = a. Định a để (D) cắt (C) tại hai điểm P, Q phân biệt khác M.

Giải

Tiếp tuyến với (C) tại M có hệ số góc là:

$$k = y'(a) = 2a^3 - 6a$$

Nên phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{1}{2}a^4 - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (C) là:

$$\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{1}{2}a^4 - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^4 - a^4) - 3(x^2 - a^2) - (2a^3 - 6a)(x - a) = 0$$

$$\Rightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 6) = 0$$

Do đó (D) cắt (C) tại hai điểm phân biệt P, Q khác M

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = a^2 - 3a^2 + 6 > 0 \\ a^2 + 2a^2 + 3a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < 3 \\ a^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \neq |a| < \sqrt{3}.$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C). Hãy viết phương trình tiếp tuyến trong các trường hợp sau:

a) Tại điểm có hoành độ là $x_0 = 1$.

b) Song song và đường thẳng $-8x + 4y + \sqrt{2008} = 0$.

c) Vuông góc với đường thẳng $2x + 8y + 1111 = 0$.

Đáp số: a) $y = 2$

b) $y = 2x - 1$

c) $y = 4x - 6$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2$ tại các giao điểm với Ox.

Đáp số: $y = 9x + 18$, $y = 0$.

3. Cho hàm số $y = x^3 + x^3 + x + 2008$ (C). Chứng minh rằng trên đồ thị (C) không thể có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

4. Cho hàm số $y = \sqrt{1 - x - x^2}$ (C). Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) trong các trường hợp sau:

a) Tại điểm có hoành độ là $x_0 = \frac{1}{2}$

b) Song song với đường thẳng $2x + 4y = 0$.

Đáp số: a) $y = -2x + \frac{3}{2}$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 1}$ có đồ thị (C).

a) Tìm m để (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B

b) Chứng minh rằng: $\begin{cases} f'(x_A) = \dfrac{2x_A + m}{x_A^2 + 1}, \\ f'(x_B) = \dfrac{2x_B + m}{x_B^2 + 1} \end{cases}$

c) Tìm m để các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau.

Đáp số: a) $\forall m \in \mathbb{R}$

c) $\forall n \in \mathbb{R}$.

§3. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ LAGRANGE

Để giải các bài toán về

- Đẳng thức
- Bất đẳng thức
- Phương trình

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Định lý*

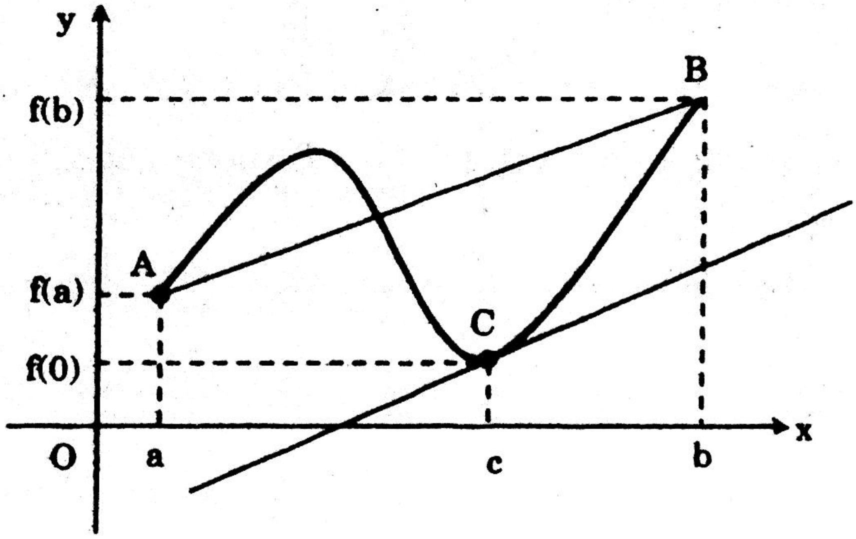
Nếu hàm số f liên tục trên [a, b] và có đạo hàm trên (a, b) thì tồn tại c ∈ (a, b) sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. ***Hệ quả:*** Nếu hàm số f liên tục trên [a, b] và $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì f là hàm hằng trên [a, b].

3. *Ý nghĩa hình học*

Nếu hàm số f thỏa các điều kiện của định lý Lagrange trên cung AB thì tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng AB.



B/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị c trong định lý Lagrange của hàm số:

$$y = f(x) = x - x^3 + 2008 \text{ trên } [-2, 1].$$

Giải

Ta có: $y = f(x) = x - x^3 + 2008$ liên tục trên $[-2, 1]$ và có đạo hàm trên $(-2, 1)$ nên tồn tại $c \in (-2, 1)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{0 - 6}{3} = -2$$

$\Leftrightarrow 1 - 3c^2 = -2$

$\Leftrightarrow c^2 = 1$

$\Leftrightarrow c = -1$ (vì $c \in (-2; 1)$).

Bài 2. Cho $A(1, 1)$, $B(3, -3)$ thuộc parabol $y = 2x - x^2$ (P). Hãy tìm tọa độ điểm M trên cung AB của (P) mà tại đó tiếp tuyến song song với dây cung AB.

Giải

$y = f(x) = 2x - x^2$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (1, 3)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

$\Leftrightarrow 2 - 2c = -2$

$\Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow f(c) = 0.$

Vậy M(2, 0) chính là điểm cần tìm.

Bài 3. Cho f, g liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b). Chứng minh rằng, nếu $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

(Định lý Cauchy)

Giải

Nhận xét: Do $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$ nên $g(b) \neq g(a)$

Xét $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.g(x)$

Rõ rằng $\mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trên (a, b)

Hơn nữa:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.g(a)$$

$$= [f(a)\,g(b) - f(a)\,g(a) - f(b)\,g(a) + f(a)\,g(a)] / [g(b) - g(a)]$$

$$= \frac{f(a)\,g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.g(b)$$

$$= \frac{f(a)\,g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)}$$

$$= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

$\Rightarrow F(a) = F(b)$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$0 = F(b) - F(a) = F'(c)\,(b - a)$$

$$\Leftrightarrow F'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Bài 4. Cho f liên tục trên $[a, b]$ $(0 < a < b)$ và có đạo hàm trên (a, b). Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c)$$

Giải

Xét $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $G(x) = \dfrac{1}{x}$ trên $[a, b]$

Theo kết quả bài 3, ta có:

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \quad (c \in (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(c)c - f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}} = f(c) - cf'(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$

Bài 5. Cho f liên tục trên $[0, 1]$ và có đạo hàm trên $(0, 1$. Chứng minh rằng nếu $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$ thì tồn tại $a, b \in (0,1)$, $a \neq b$ sao cho $f'(a)\,f'(b) = 1$.

Giải

Xét $g(x) = f(x) + x - 1,\ x \in [0, 1]$.

- $g(0)\,g(1) = (f(0) - 1)\,f(1) = -1 < 0$

  $\Rightarrow$ Tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $g(c) = 0$

  $\Leftrightarrow f(c) = 1 - c$.

- Áp dụng định lý Lagrange trên $[0, c]$ và $[c, 1]$ ta tìm được a, b $(0 < a < c < b < 1)$ sao cho:

$$\begin{cases} f(c) - f(0) = f'(a)(c - 0) \\ f(1) - f(c) = f'(b)(1 - c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(a) - \dfrac{f(c)}{c} = \dfrac{1 - c}{c} \\ f'(b) = \dfrac{1 - f(c)}{1 - c} = \dfrac{c}{1 - c} \end{cases}$$

Vậy: $f'(a).f'(b) = 1$.

Bài 6. Chứng minh rằng:

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

b) $|\cos x - \cos y| \le |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải

a) • $x = y$: Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

- $x < y$

Xét $f(t) = \sin t,\ t \in [x, y]$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (x, y)$ sao cho:

$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x)$

$\Rightarrow \sin y - \sin x = \cos c\,(y - x)$

$\Rightarrow |\sin x - \sin y| = |\cos c|.|x - y| \le |x - y|$

- $x > y$: Chứng minh tương tự (như trường hợp $x < y$), ta cũng có: $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

Tóm lại, ta chứng minh được

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Theo câu a) ta có:

$$|\cos x - \cos y| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right|$$

$$\le \left|\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right| = |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 7. Chứng minh rằng:

a) $2008y^{2007}(x-y) < x^{2008} - y^{2008} < 2008x^{2007}(x-y), \forall x > y > 0$

b) $\dfrac{x-y}{\cos^2 y} < \tan x - \tan y < \dfrac{x-y}{\cos^2 x}, \forall\ 0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Giải

a) Xét $f(t) = t^{2008}, t \in [y, x]$

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (y, x)$ sao cho:

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$

$$\Rightarrow x^{2008} - y^{2008} = 2008\, c^{2007}(x-y)$$

Do $0 < y < c < x \Rightarrow 0 < y^{2007} < c^{2007} < x^{2007}$

$$\Rightarrow 2008y^{2007}(x-y) < x^{2008} - y^{2008} < 2008x^{2007}(x-y).$$

b) Xét $f(t) = \tan t, t \in [y, x] \subset \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (y, x)$ sao cho:

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$

$$\Rightarrow \tan x - \tan y = \frac{x-y}{\cos^2 c}$$

Do $0 < y < c < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 1 > \cos y > \cos c > \cos x > 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 y > \cos^2 c > \cos^2 x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 y} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\cos^2 y} < \tan x - \tan y < \frac{x-y}{\cos^2 x}.$$

Bài 8. Chứng minh rằng:

$$(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{2} > 1, \forall x \ge 2.$$

Giải

Xét $f(t) = t\cos\dfrac{\pi}{t}, t \in [x, x+2]\ (x \ge 2)$

$$f'(t) = \cos\frac{\pi}{t} + \frac{\pi}{t}\sin\frac{\pi}{t}$$

Theo định lý Lagrange tồn tại c ∈ (x, x + 1) sao cho:

$$f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x + 1) - f(x)$$

$$\Rightarrow (x + 1)\cos\frac{\pi}{x+1} = x\cos\frac{\pi}{x} = \cos\frac{\pi}{c} + \frac{\pi}{c} - \sin\frac{\pi}{c}$$

$$\text{Vì } c > 2 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{c} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{c} > \sin\frac{\pi}{c} > 0 \\ 0 < \cos\frac{\pi}{c} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{c}\sin\frac{\pi}{c} > \sin^2\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{c} > \cos^2\frac{\pi}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{c} + \frac{\pi}{c}\sin\frac{\pi}{c} > \sin^2\frac{\pi}{c} + \cos^2\frac{\pi}{c} = 1$$

$$\Rightarrow (x + 1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1.$$

Bài 9. Cho $\frac{a}{2009} + \frac{b}{2008} + \frac{bc}{2007} = 0$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trên (0, 1).

Giải

Xét $f(x) = \frac{a}{2009}x^{2009} + \frac{b}{2008}x^{2008} + \frac{c}{2007}x^{2007}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = ax^{2008} + bx^{2007} + cx^{2006} \\ \qquad = x^{2006}(ax^2 + bx + c) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại d ∈ (0, 1) sao cho:

$f'(d) = 0 \Rightarrow ad^2 + bd + c = 0$

⇔ d là nghiệm phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ trên (0, 1).

Bài 10. Cho $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$ $(1 \le n \in \mathbb{Z})$

Chứng minh rằng phương trình: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ có nghiệm trên (0, 1).

Giải

Xét $f(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \dots + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x$ trên $\mathbb{R}$

$f'(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho:

$f(1) - f(0) = f(c)\,(1 - 0)$

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_1c + a_0 = 0$

$\Leftrightarrow$ c là nghiệm của phương trình.

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ trên $(0, 1)$.

Bài 11. Cho $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1}$

$$= a_0 + a_1 + a_2\frac{2^2}{3} + a_3\frac{2^3}{4} + \dots + a_n.\frac{2^n}{n+1} = 0$$

Chứng minh rằng phương trình:

$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} = 0$ có nghiệm trên $(0, 2)$.

Giải

Xét $f(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$ trên $\mathbb{R}$

$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$f''(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$

Hơn nữa:

- $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Theo định lý Lagrange tồn tại $\alpha \in (0, 1)$ sao cho $f'(\alpha) = 0$

- $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = a_0 2 + \frac{1}{2}a_1 2^2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n 2^{n+1} \end{cases}$

$$= 2\left(a_0 + a_1 + a_2\frac{2^2}{3} + \dots + a_n\frac{2^n}{n+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Theo định lý Lagrange tồn tại $\beta \in (0, 1)$ sao cho $f'(\beta) = 0$

Như vậy $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.

$\Rightarrow$ Theo định lý Lagrange tồn tại $\gamma \in (\alpha, \beta)$ sao cho $f''(\gamma) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 + 2a_2\gamma + \ldots + na_n\gamma^{n-1} = 0$

$\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 12. Chứng minh rằng, nếu hàm số f có đạo hàm trên [a, b] và $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm trên [a, b] thì phương trình $f(x) = 0$ không thể có hai nghiệm.

Giải

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 $(a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b)$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $c_1 \in (x_1, x_2)$, $c_2 \in (x_2, x_3)$ sao cho:

$$\begin{cases} f(x_2) - f(x_1) = f'(c_1)\,(x_2 - x_1) \\ f(x_3) - f(x_2) = f'(c_2)\,(x_3 - x_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(c_1) = f'(c_2) = 0$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với giả thiết $f'(x) = 0$ chỉ có một nghiệm trên [a, b].

Bài 13. Chứng minh rằng, phương trình $\sin x = \frac{x}{9}$ có đúng bảy nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Giải

Ta có: $f(x) = \sin x - \frac{x}{9}$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Vì vậy nếu $f(x) = 0$ có n nghiệm dương thì nó sẽ có $2n + 1$ nghiệm.

Hơn nữa:

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi) = \left(1 - \frac{\pi}{18}\right)\left(-\frac{\pi}{9}\right) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trên $[0, \pi]$

(vì đã có $f(0) = 0$)

Vì $f'(x) = \cos x - \frac{1}{9} = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[0, \pi]$ nên theo bài 12 phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm trên $[0, \pi]$.

- Trên $[\pi, 2\pi]$, ta có $f(x) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[\pi, 2\pi]$

- Trên $[2\pi, 3\pi]$, ta có $f(2\pi) < 0$, $f(\frac{5\pi}{2}) > 0$, $f(3\pi) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên $[2\pi, 3\pi]$.

Vì $f'(x) = \cos x - \frac{1}{9} = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[2\pi, 3\pi]$ nên theo bài 12 phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm trên $[2\pi, 3\pi]$

- Trên $[3\pi, +\infty)$, ta có $f(x) < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên $[3\pi, +\infty)$.

Vậy: Phương trình $f(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Bài 14. Chứng minh rằng phương trình:

$$a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$$

luôn có nghiệm trên $[0, 2\pi]$ với a, b, c là các tham số.

Giải

Xét $f(x) = \frac{a}{3}\sin 3x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\sin x - \cos x + 1$, $x \in [0, 2\pi]$

$f'(x) = a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x$

Theo định lý Lagrange tồn tại $x_0 \in (0, 2\pi)$ sao cho

$$f'(x_0) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\cos 2x_0 + b\cos 2x_0 + c\cos x_0 + \sin x_0 = 0$$

$\Leftrightarrow$ (đpcm)

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tính $f'(x)$ với $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x.\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $f(x) = \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Cho P(x) là đa thức bậc 9999 theo x có 9999 nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_{9999}$.

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{9999} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = 0$.

3. Cho $0 < a < b < c < 2009$. Chứng minh rằng:

a) $1001.a^{1000}(b - a) < b^{1001} - a^{1001} < 1001b^{1000}(b - a)$.

b) $3a < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$

$$< a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3c.$$

4. Chứng minh phương trình: $5x^4 + 40x^3 + 105x^2 + 100x + 24 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$.

5. Cho $a + 2b + 4c = 0$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^3 + bx + c = 0$ có nghiệm trên $(0, 1)$.

6. Cho $\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{3} = 0$.

Chứng minh rằng phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có nghiệm trên $(0,, 1)$.

(ĐHQG Hà Nội, năm 2001)

7. Chứng minh rằng phương trình:

$a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx = 0$ luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$.

8. Chứng minh rằng nếu phương trình $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x = 0$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ có nghiệm dương thì phương trình

$na_nx^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$ cũng có nghiệm dương.

§4. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hàm số $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ gọi là tăng (đồng biến) trên (a, b) nếu:
  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.
- Hàm số $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ gọi là giảm (nghịch biến) trên (a, b) nếu:
  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 > x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

2. Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên (a, b)

- Nếu f tăng trên (a, b) thì $f'(x) \ge 0, \forall x \in (a, b)$
- Nếu f giảm trên (a, b) thì $f'(x) \le 0, \forall x \in (a, b)$
- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì f tăng trên (a, b)
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì f giảm trên (a, b)
- Nếu $f'(x) \ge 0$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên (a, b) thì f tăng trên (a, b)

- Nếu $f'(x) \le 0$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên (a, b) thì f giảm trên (a, b)

Chú ý: • Hàm số tăng (giảm) gọi chung là hàm số đơn điệu.

• Trong các hàm số cấp xét trong chương trình THPT (ngoại trừ hàm hằng), ta có kết quả sau:

+ f tăng trên $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in (a, b)$

+ f giảm trên $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in (a, b)$.

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 3x + \dfrac{3}{x} + 2009$

b) $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + \sqrt{1001}$

c) $y = x\sqrt{1 - x^2} - 99$.

Giải

a) $y = 3x + \dfrac{3}{x} + 2009$

+ MXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ $y = 3 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3(x^2 - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$.

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Vậy: Hàm số tăng dần $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$

Hàm số giảm trên $(-1, 0)$, $(0, 1)$

Chú ý: Miền xác định được viết tắc là MXĐ.

b) $y = 2x^3 - x^2 - 24x + \sqrt{1001}$

+ MXĐ $D = \mathbb{R}$

+ $y' = 6x^2 - 18x - 24 = 6(x^2 - 3x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Vậy: Hàm số tăng dần $(-\infty, -1)$, $(4, +\infty)$

Hàm số giảm dần trên $(-1, 4)$

c) $y = x\sqrt{1-x^2} - 99$

+ MXĐ $D = [-1, 1]$

+ $y' = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
y'	▨	▨	▨	−	0	+	0	−	▨	▨	▨
y	▨	▨	▨	↘		↗		↘	▨	▨	▨

Vậy: Hàm số tăng trên $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Hàm số giảm trên $\left(-1, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

Bài 2. Định m để các hàm số:

a) $y = (m^2-1)\dfrac{x^3}{3} + (m+1)x^2 + 3x + 100$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$

b) $y = (m-3)x - (2x+1)\cos x$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$

c) $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2008$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Giải

a) $y' = (m^2-1)x^2 + 2(m+1)x + 3$

Hàm số tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có các câu tổng hợp

- $m = -1$: $y' = 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

- $m = 1$: $y' = 4x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (không xảy ra)
- $m \neq \pm 1$: $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ 2m^2 - 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m < -1 \end{array}\right.$$

Vậy: $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m < -1 \end{array}\right.$ là kết quả cần tìm.

b) $y' = m - 3 + (2m + 1)\sin x$

Hàm số y giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow g(t) = (2m+1)t + m - 3 \leq 0, \forall t = \sin \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 + m - 3 \leq 0 \\ -2m - 1 + m - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{2}{3} \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}$$

c) $y' = 3x^2 - 6(2m + 1)x + 12m + 5$

Hàm số y tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9(2m + 1)^2 - 3(12m + 5) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(4m^2 + 4m + 1) - 12m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{6}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Bài 3. Định m để các hàm số:

a) $y = \dfrac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{x - m}$ luôn tăng trên $(1, +\infty)$

b) $y = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 4m$ luôn giảm trên $(-1, 1)$

(Đề thi ĐH)

Giải

a) + MXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$+\ y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$$

Hàm số y luôn tăng trên $(1, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' \geq 0,\ \forall x \in (1, +\infty) \\ m \notin (1, +\infty) \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp:

- $\begin{cases} \Delta y = 4m^2 - 2(m^2 - 2m - 1) \leq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 \leq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m -1$

- $\begin{cases} g(x) = 0 \\ m \leq 1 \end{cases}$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ g(1) \geq 0 \\ \Delta y > 0 \\ \dfrac{\delta}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \neq -1 \\ m^2 - 6m + 1 \geq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq m < 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 3 + \sqrt{8} \\ m \leq 3 - \sqrt{8} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3 - 2\sqrt{2}.$$

Tóm lại: $m \leq 3 - 2\sqrt{2}$ là kết quả cần tìm.

b) $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$.

Hàm số y luôn giảm trên $(-1, 1) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 \leq -1 < 1 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 10 + m \leq 0 \\ y'(-1) = -2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -10.$$

Bài 4. Xác định m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + (2m-1)x + m}{x+1}$ đồng biến trên $(3, +\infty)$.

(CĐ Sư phạm Quảng Ngãi, năm 2006)

Giải

$+\ D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$+\ y' = \frac{x^2 + 2x + m - 1}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

y đồng biến trên $(3, +\infty)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in (3, +\infty)$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2x + m - 1 \geq 0, \forall x \in (3, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = 1 - m + 1 \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(3) \geq 0 \\ \dfrac{\delta}{2} < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ \begin{cases} m < 2 \\ 14 + m \geq 0 \\ -2 < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ -14 \leq m < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq -14.$$

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$

Tìm m để hàm số nghịch biến trên $[1,+\infty)$.

Giải

+ MXĐ: $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

+ $y' = \dfrac{mx^2 + 4mx + 14}{(x + 2)^2} = \dfrac{g(x)}{(x + 2)^2}$.

Các trường hợp:

- $m = 0$: $\quad y' = \dfrac{14}{(x + 2)^2} > 0, \forall x \in [1,+\infty)$

(không thỏa yêu cầu bài toán).

- $m \neq 0$: $\quad \Delta' = 4m^2 - 14m = 2m(2m - 7)$

+ Nếu $m < 0$ thì $\begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Khi đó $y' \leq 0$, $\forall x \in [1,+\infty)$

$\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mg(1) \geq 0 \\ \Delta' > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5m + 14 \leq 0 \\ -2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{5}$$

+ Nếu $0 < m \leq \dfrac{7}{2}$ thì $\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

Khi đó $g(x) \geq 0, \forall x \in [1,+\infty)$

(Không thỏa yêu cầu bài toán)

+ Nếu $m > \frac{7}{2}$ thì $\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Khi đó $y' \leq 0, \forall x \in [1,+\infty)$

$\Leftrightarrow g(x) \leq 0, \forall x \in [1,+\infty)$

$\Leftrightarrow [1,+\infty) \subset [x_1, x_2]$

(với x_1 x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$)

Điều này không xảy ra.

Kết luận: Hàm số nghịch biến trên $[1,+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{5}$.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm các khoảng đơn điệu trên các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1001$

b) $y = -x^4 + 2x^2 + 2009$

c) $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$

d) $y = x - 2\sin x, x \in (0, 2\pi)$.

Đáp số: a) y luôn tăng trên R

b) y tăng trên $(-\infty, -1), (0, 1)$

y giảm trên $(-1, 0), (1, +\infty)$

c) y tăng trên $(-\infty, -2), (0, +\infty)$

y giảm trên $(-2, -1), (-1, 0)$

d) y tăng trên $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

y giảm trên $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

2. Định m để các hàm số:

a) $y = 8x^2 - 6mx + 7$ tăng trên $(1, +\infty)$

b) $y = x^3 - 3(2m + 1)x^2 + (12m + 5)x - 9$ tăng trên $(-\infty, -1)$ và $(2, +\infty)$.

Đáp số: a) $m \leq 4$

b) $-\frac{7}{12} \leq m \leq \frac{5}{12}$.

3. Định a để $y = x^3 - 3(a-1)x^2 + 3a(a-2)x + 1$ luôn tăng trên

$I = \{x \in R \setminus 1 \leq |x| \leq 2\}$.

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} a \geq 4 \\ a \leq -2 \end{array}\right.$

4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m}{x - 2m}$

a) Tìm m để hàm số đồng biến trên $R \setminus \{2m\}$

b) Tìm m để hàm số đồng biến trên $(1, +\infty)$.

Đáp số: a) $m = 0$

b) $m \leq \dfrac{7 - \sqrt{33}}{8}$.

5. Định m để hàm số: $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x - 4m\cos x - (2m^2 + 4m - 9)x$ luôn luôn giảm trên R.

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

6. Định m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x + \sqrt{2009}$ tăng trên $(0, 3)$.

Đáp số: $a \geq \dfrac{12}{7}$.

7. Tìm điều kiện cần và đủ để hàm số $y = a\sin x + b\cos x + 2x + 101$ tăng trên R

Đáp số: $a^2 + b^2 \leq 4$.

§5. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$

- Hàm số f được gọi là đạt cực đại tại x_0 nếu tồn tại $V_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ sao cho: $f(x) < f(x_0), \forall x \in V_\delta \setminus \{x_0\}$.
- Hàm số f được gọi là đạt cực tiểu tại x_0 nếu tồn tại $V_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ sao cho: $f(x) > f(x_0), \forall x \in V_\delta \setminus \{x_0\}$.
- Hàm số f được gọi là đạt cực trị tại x_0 nếu f đạt cực đại hay cực tiểu tại x_0.

2. Các định lý

Định lý 1: (Điều kiện cần để hàm số cực trị)

Nếu ham số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x) = 0$.

Định lý 2: (Điều kiện đủ để hàm số có cực trị)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (Có thể trừ tại x_0). Khi đó:

- Nếu khi x đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – thì f đạt cực đại tại x_0.

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
$f'(x)$	+		–
$f(x)$	↗		↘

- Nếu khi x đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ – sang + thì f đạt cực tiểu tại x_0

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
$f'(x)$	–		+
$f(x)$	↘		↗

Định lý 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp 2 tại x_0 và $f'(x_0) = 0$.

- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.
- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 + 2x^2 + 3$ b) $y = x^4 - 6c^2 + 8x - 1$

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ d) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x - 2}$

Giải

a) + MXĐ: D = R

+ $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘		↗	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại (0, 3).

b) + MXĐ: D = R

+ $y' = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↗		↘	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại (–2, –23).

c) + MXĐ: D = R\{1}

+ $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y		↗		↘	||	↘		↗	

Vậy : Hàm số đạt cực đại tại $(1-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

Hàm số đạt cực tiểu tại $(1+\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

d) + MXĐ: D = R

$$+\ y' = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x-2\right)^2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x+1)^4(x-2)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		+	‖	–	0	+	‖	+	
y		↗		↘		↗		↗	

Vậy : Hàm số đạt cực đại tại (–1; 0)

Hàm số đạt cực tiểu tại $(1; -\sqrt[3]{4})$.

Bài 2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + \cos 2x,\ x \in [0, 2\pi]$

b) $y = |2x^2 - 3x - 5|$

c) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + 1$

Giải

a) + MXD: $D = [0, 2\pi]$

+ $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

- $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 < 0 \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$ là điểm cực đại.
- $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ là điểm cực tiểu.
- $y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 < 0 \Rightarrow C = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ là điểm cực đại.
- $y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 6 > 0 \Rightarrow D\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ là điểm cực tiểu.

b) + MXĐ: D = R

$$+\ y = |2x^2 - 3x - 5| = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5, x \in (-\infty, -1] \vee \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right) \\ -2x^2 + 3x + 5, x \in \left(-1, \dfrac{5}{2}\right) \\ 0 \qquad\qquad , x \in \left\{-1, \dfrac{5}{2}\right\} \end{cases}$$

+ Xét ý:

- Nếu $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ thì $y' = 4x - 3$

  Nếu $y' > 0$ khi $x \in (\frac{5}{2}, +\infty)$ và $y' < 0$ thì $x \in (-\infty, -1)$.

- Nếu $x \in (-1, \frac{5}{2})$ thì $y' = -4x + 3$

  Nếu $y' > 0$ khi $(-1, \frac{3}{4})$ và $y' < 0$ khi $x \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{2})$.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$3/4$		$5/2$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y		↘		↘		↗		↗	

(để ý hàm số y liên tục tại -1 và $\frac{5}{2}$)

Vậy hàm số đạt cực đại tại $(\frac{3}{4}, \frac{49}{8})$

Hàm số đạt cực tiểu tại $(-1, 0)$; $(\frac{5}{2}, 0)$.

c) + MXĐ: D = R

+ $y' = -\sin x - \sin 2x = -\sin x(1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z$$

+ $y''(k\pi) = -\cos k\pi - 2 < 0$

⇒ $A_k(k\pi, \frac{3}{2}+\cos k\pi)$ là các điểm cực đại

• $y''(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi) = \frac{3}{2} > 0$

⇒ $B_k(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \frac{1}{4})$ là các điểm cực tiểu.

Bài 3.

a) Cho hàm số $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ (u, v là các hàm số có đạo hàm trên $(\delta - x_0, \delta + x_0)$.

Chứng minh rằng, nếu $y'(x_0) = 0$ và $v'(x_0) \neq 0$ thì $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

b) Chứng minh rằng, nếu hàm số $y = \frac{1004x^2 + x + m}{x + 9999}$ (với m là tham số cho trước đạt cực đại tại (x_1, y_1) và cực tiểu tại (x_2, y_2) thì $|y_1 - y_2| = 2008|x_1 - x_2|$.

Giải

a) Ta có: $y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

$$y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = y(x_0)$$

Vậy $y(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

b) Ta có $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$. Nên theo kết quả câu a, ta có:

$$\begin{cases} y_1 = y(x_1) = 2008x_1 + 1 \\ y_2 = y(x_2) = 2008x_2 + 1 \end{cases}$$

⇒ $y_1 - y_2 = 2008(x_1 - x_2)$

⇒ $|y_1 - y_2| = 2008|x_1 - x_2|$.

Bài 4. Cho hàm số:

$$y = x^3 - 3(m - 1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m - 1).$$

a) Tìm m để hàm số có 2 cực trị.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

Giải

a) + MXĐ: D = R

+ $y' = 3x^2 - 6(m-1)x + 2m^2 - 3m + 2$

Hàm số có hai cực trị ⇔ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m-1)^2 - 3(2m^2 - 3m + 2) > 0$

$\Leftrightarrow 3(m^2 - 2m + 1) - (2m^2 - 3m + 2) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ m < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

b) Ta có:

$$y = \frac{1}{3}(x - m + 1)y' - \frac{2}{3}9m^2 - 3m + 1)x + \frac{2}{3}(m^2 - 4m^2 + 4m - 1$$

Gọi (x_1, y_1), (x_2, y_2) là các điểm cực trị của y.

Khi đó: $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$

$$\text{Nên}\begin{cases} y_1 = -\dfrac{2}{3}(m^2 - 3m + 1)x_1 + \dfrac{2}{3}(m^3 - 4m^2 + 4m - 1) \\ y_2 = -\dfrac{2}{3}(m^2 - 3m + 1)x_2 + \dfrac{2}{3}(m^3 - 4m^2 + 4m - 1) \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là:

$$y = -\frac{2}{3}(m^2 - 3m + 1)x + \frac{2}{3}(m^3 - 4m^2 + 4m - 1).$$

Bài 5. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (m^2+1)x + 4m^3 + m}{x + m}$ (Cm)

Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị (Cm) có một điểm cực trị thuộc góc phần tư thứ II và một điểm cực trị còn lại thuộc góc phần tư thứ IV của mặt phẳng tọa độ.

(ĐH Y dược, TPHCM, năm 2001)

Giải

+ MXĐ: D = R \ {−m}

+ $y' = \dfrac{mx^2 + 2m^2x - 3m^3}{(x+m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+m)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \text{ có nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa } x_1 < 0 < x_2 \\ y(x_2) < 0 < y(x_1) \end{cases}$

- $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3m < m = x_2 \\ y(x_2) = 3m^2 + 1 < 0 < 1 - 5m^2 = y(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \phi$
- $m < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m < -3m = x_2 \\ y(x_2) = 1 - 5m^2 < 0 < 3m^2 + 1 = y(x_1) \end{cases} \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $m < -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ là kết quả cần tìm.

Bài 6. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu mà hoành độ $\in (-2,3)$.

Giải

+ MXD: D = R

+ $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 6[x^2 + (m-1)x + (m-2)]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ y' = 0 có nghiệm x_1, x_2 thỏa $-2 < x_1 < x_2 < 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-2) > 0 \\ y'(3) > 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4(m-2) > 0 \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(m-1) + m - 2 > 0 \\ 9 + 3(m-1) + m - 2 > 0 \\ m^2 - 6m + 9 > 0 \\ -4 < 1 - m < 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > -1 \\ (m-3)^2 > 0 \\ -5 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^4}{2} - x^2 + 3$ b) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Đáp số: a) • $M_{CĐ}$ (0,4)

• N_{CT} $(-1, \dfrac{5}{2})$, $P_{CT}$$(1, \dfrac{5}{2})$

b) • $M_{CĐ}$ (0,4)

• $N_{CT}$$(-2, \dfrac{8}{3})$

c) • $M_{CĐ}(-1,3)$

• $N_{CT}\left(1, \frac{1}{3}\right)$

2. Tìm cực trị của hàm số sau:

$$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x + \frac{2x+3}{2}.$$

Đáp số: • $x_{CĐ} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

• $x_{CT} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in Z.$

3. Định m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x_0 = 2$

Đáp số: m = –3.

4. Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 2008$.

Định m để hàm số

a) Chỉ có cực tiểu và không có cực đại

b) Có ba cực trị.

Đáp số: a) $\left[\begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{7}}{3} \le m \le \frac{1+\sqrt{7}}{3} \\ m = -1 \end{array}\right.$; b) $\left[\begin{array}{l} -1 \ne m < \frac{1-\sqrt{7}}{3} \\ m > \frac{1+\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$

5. Tìm m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2(m+1)x$ có cực đại, cực tiểu thỏa

$$(y_{CĐ} - y_{CT})^2 = \frac{2}{9}(4m+4)^3.$$

Đáp số: m = 1.

6. Xác định m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Đáp số: $m = \pm\sqrt{2}$.

7. Tìm m để hàm số $y = m\sqrt{x^2+1} - 2x + 7$ có cực tiểu.

Đáp số: m > 2.

8. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+2)x + 3m + 2}{x+1}$ có cực đại và cực tiểu thỏa $y_{CĐ}^2 + y_{CT}^2 > \dfrac{1}{2}$.

Đáp số: $m > -\dfrac{1}{2}$.

§6. ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Các hàm số để giải, các bài toán về

- GTLN, GTNN
- Bất đẳng thức
- Phương trình
- Bất phương trình
- Hệ phương trình
- Hệ bất phương trình

A/ TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Cho hàm số $f: D \to R$ $(\phi \neq D \subset R)$

- $M = \max\limits_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \bullet\ f(x) \le M, \forall x \in D \\ \bullet\ \text{Tồn tại } x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M \end{cases}}$

- $m = \min\limits_{x \in D} f(x) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \bullet\ f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \bullet\ \text{Tồn tại } x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = m \end{cases}}$

Phương pháp:

Để tìm GTLN, GTNN của hàm số f có đạo hàm trên D, ta làm như sau:

+ Lập bảng biến thiên của hàm số f trên D

+ Dựa vào bảng biến thiên, ta tìm được GTLN, GTNN (nếu có) của hàm số f trên D.

Trong trường hợp đặc biệt D = [a, b], ta có thể làm như sau:

- Giải phương trình $f'(x) = 0$ trên (a,b) và giả sử có các nghiệm là $x_1, x_2, \ldots x_n$.

- Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$
- Số lớn nhất trong các giá trị trên là GTLN của f trên $[a, b]$
- Số nhỏ nhất trong các giá trị trên là GTNN của f trên $[a, b]$.

B/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và nhỏ nhất (GTNN) của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1, 2]$ b) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

(ĐH & CĐ năm 2003)

Giải

a) + $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in [-1, 2]$

$$+ \ y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

+ Bảng biến thiên:

x	-1		1		2
y'		+	0	−	
y	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Vậy $\max\limits_{[-1,2]} y = \sqrt{2}$; $\min\limits_{[-1,2]} y = 0$.

b) + MXĐ: $D = [-2, 2]$

$$+ \ y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$\sqrt{2}$		2
y'		+	0	−	
y	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Vậy $\max\limits_{[-2,2]} y = 2\sqrt{2}$, $\min\limits_{[-2,2]} y = -2$.

Bài 2. a) Cho $0 < \alpha < 1$ ($\alpha \in Q$). Chứng minh rằng $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$, $\forall x > 0$.

(BĐT Bermonlli)

b) Từ đó suy ra: $n < \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < n + 1$, $\forall x \in N$

(ĐH Kinh tế)

Giải

a) Xét $f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$, $x \geq 0$

$\Rightarrow f'(x) = \alpha\,[1 - (1 + x)^{\alpha-1}] > 0, \forall x > 0$

$$\text{(vì } \begin{cases} x > 0 \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x > 1 \\ \alpha - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (1 + x)^{\alpha-1} < 1)$$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow 1 + \alpha x > (1 + x)^\alpha, \forall x > 0.$

b) $\forall i = 1, 2, \ldots, n,$ ta có:

$$1 < \sqrt[i+1]{\frac{i+1}{i}} = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{1+i}} < 1 + \frac{1}{i(i+1)} \leq 1 + \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

Do đó:

$$i = 1 \qquad 1 < \sqrt{2} < 1 + (1 - \frac{1}{2}).$$

$$i = 2 \qquad 1 < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} < 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$$

$+$ ……………………………………………………

$$i = n \qquad 1 < \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow n < \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < n + 1 - \frac{1}{n+1}$$

Vậy : $n < \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} < n + 1.$

Bài 3. Tìm GTLN của hàm số: $y = f(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên $[0, 2]$.

(Đề thi tú tài, năm 2007)

Giải

$$y' = 9x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{7}{9} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{7}{9}$	0		1		2	$+\infty$
y'				−	0	+		
y			1	↘	−4	↗	7	

Vậy $\max\limits_{[0,2]} y = 7$.

Bài 4. Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \dfrac{7}{27}$

(Đề thi Olympic toán Quốc tế)

Giải

Không giảm tính tổng ta có thể xem $z = \min\{x,y,z\}$

Khi đó, từ $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq z \leq \dfrac{1}{3} \\ 0 \leq x, y \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow xy + yz + xz - 2xyz = xy(1 - 2z) + z(x + y) \geq 0$$

Hơn nữa:

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - 2z) + z(x + y)$$

$$\leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \cdot (1 - 2z) + z(1 - z)$$

$$\leq \frac{1}{4}(1 - z)^2(1 - 2z) + z(1 - z) \leq \frac{1}{4}(1 + z^2 - 2z^3) = f(z)$$

$$f'(z) = \frac{1}{2}z\,(1 - 3z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của f:

x	0		$\frac{1}{3}$
f		+	
f	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{7}{27}$

$\Rightarrow$ $xy + yz + zx - 2xyz \le f(2) \le \frac{7}{27}$

Vậy $0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$.

Bài 5. Cho ΔABC có chu vi bằng 3 chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \ge 13.$$

(ĐH Vinh, năm 2001)

Giải

Không giảm tính tổng quát ta xem $a \ge b \ge c$

Khi đó: $\begin{cases} 3a \ge a + b + c = 3 \\ a < b + c = 3 - a \end{cases} \Rightarrow 1 \le a < \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc &= 3a^2 + 3(b^2 + c^2) + 4abc \\
&= 3a^2 + 3(b + c)^2 - 6bc + 4abc \\
&= 3a^2 + 3(b + c)^2 - 2bc(3 - 2a), \text{ do } 3 - 2a > 0 \\
&\ge 3a^2 + 3(3 - a)^2 - \frac{1}{2}(b + c)^2(3 - 2a) \\
&\ge 3a^2 + 3(3 - a)^2 - \frac{1}{2}(3 - a)^2(3 - 2a). \\
&\ge a^3 - \frac{3a^2}{2} + \frac{27}{2} = f(a).
\end{aligned}$$

$f'(a) = 3a^2 - 3a = 3a(a - 1) \ge 0, \forall a \in [1, \frac{3}{2}]$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[1, \frac{3}{2}]$

$\Rightarrow f(a) \ge f(1) = 13, \forall a \in [1, \frac{3}{2}]$

Vậy: $3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \ge 13$

Dấu " = " $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 6. Cho x,y thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y - 2|$$

(ĐH & CĐ, Khối B, năm 2006)

Giải

Trong mặt phẳng, với hệ trục tọa độ Oxy, xét:

$M(x - 1, -y)$, $N(x + 1, y)$.

Do: $OM + ON \geq MN$ nên:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2} = 2\sqrt{1 + y^2}$$

$$\Rightarrow A \geq 2\sqrt{1 + y^2} + |y - 2| = f(y)$$

- Với $y \leq 2$ $f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} + 2 - y$

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 1}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		2
f		−	0	+	
f		↘	$2 + \sqrt{3}$	↗	

Do đó: $f(y) \geq 2 + \sqrt{3}$, $\forall y \leq 2$.

- Với $y \geq 2$, $f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$.

Vậy $A \geq 2 + \sqrt{3}$, $\forall x,y \in R$.

Khi $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $A = 2 + \sqrt{3}$ nên giá trị nhỏ nhất của A là: $2 + \sqrt{3}$.

Bài 7. a) Cho hàm số: f: (a,b) → R có f''(x) > 0, ∀x ∈(a,b)

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right), \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)\ (2 \leq n \in N).$$

(BĐT Jensen)

b) Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq 12.$$

(ĐH Quốc gia TPHCM)

Giải

a) Lấy c ∈ (a,b)

Xét $g(x) = f(c) - f(x) + (x - c)f'(x)$, $x \in (a,b)$

$g'(x) = (x - c)\, f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = c$

Ta có BBT:

x	a		c		b
g'		–	0	+	
g		↘	0	↗	

$\Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow f(c) \geq f(x) - (x - c)\, f'(x), \forall x \in (a, b)$

Cho $c \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \in (a,b)$

Ta được:

$f(x_1) \geq f(x) - (x - x_1)f'(x)$

$+\ f(x_2) \geq f(x) - (x - x_2)f'(x)$

....

$f(x_n) \geq f(x) - (x - x_n)f'(x)$

$\Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq nf(x) - \underbrace{(nx - x_1 - x_2 - \ldots - x_n)}_{0} f'(x)$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)$$

Dấu " =" $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

b) Xét $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotan}^2 x$, $x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$

$f'(x) = -2(\text{cotan}x + \text{cotan}^3 x) > 0$,

$f''(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x}(1 + 3\text{cotan}^2 x) > 0$, $\forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$.

Theo kết quả câu a) ta có:

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq \frac{3}{\sin^2\frac{\pi}{6}} = 12$$

vì $\begin{cases} A, B, C \in (0, \pi) \\ A + B + C = \pi \end{cases}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Chú ý: Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số: $f:(a, b) \to R$ có $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$ thì $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ $(2 \leq n \in N)$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Bài 8. Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

(Trung tâm ĐTBD Cán bộ Y tế TPHCM)

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 9$.

PT $\Leftrightarrow x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = x(9-x) + m$

$\Leftrightarrow 9 + 2t = t^2 + m$

(với $t = \sqrt{x(9-x)} \in [0, \dfrac{9}{2}]$)

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 9 = -m$.

Xét $f(t) = t^2 - 2t - 9$, $t \in [0, \dfrac{9}{2}]$

$f'(t) = 2(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$\frac{9}{2}$
f		–	0	+	
f	–9	↘		↗	$\frac{9}{4}$
			–10		

Vậy: PT có nghiệm $\Leftrightarrow -10 \le -m \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \le m \le 10$

Bài 9. Phương trình $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} = 0$. $(2 \le n \in N)$

Có bao nhiêu nghiệm thực?

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2002)

Giải

Xét $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}$ trên R

$$f'(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}.$$

a) Nếu n chẵn

- Nếu $x > -1$ thì $f'(x) = (1 + x) + x^2(1 + x) + \ldots + x^{n-2}(1 + x) > 0$
- Nếu $x < -1$ thì $f'(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} < 0$
- Nếu $x = -1$ thì $f'(x) = 0$.

Như vậy ta có bảng biến thiên:

x	–∞		–1		+∞
f		–	0	+	
f	–∞	↘		↗	+∞
			f(1)		

Mà $f(-1) = (1 - 1) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \ldots.$

$$+ (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}) + \frac{1}{n} > 0$$

Nên $f(x) > 0, \forall x \in R$.

Vậy: Nếu n chẵn thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

b) Nếu n lẻ:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ n, & x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in R.$

Hơn nữa: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Vậy: Nếu n lẻ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Bài 10. Giải bất phương trình:

$$3\sqrt{\tan x + 1} \cdot \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 3\cos x} \leq 2^{1-\sqrt{\tan x}}$$

Giải

Điều kiện: $\tan x \geq 0$.

Đặt $t = \tan x \geq 0$

BPT $\Leftrightarrow 3\sqrt{t+1}.\dfrac{t+2}{t+3} \leq 2^{1-\sqrt{t}}$ (*)

Xét $f(x) = 3\sqrt{t+1}.\dfrac{t+2}{t+3}, t \geq 0$

$$f'(t) = \frac{3}{2\sqrt{t+1}}.\frac{t+2}{t+3} + 3\sqrt{t+1}.\frac{1}{(t+3)^2} > 0, \forall t \geq 0$$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f(t) \geq f(0) = 2 \geq 2^{1-\sqrt{t}}, \forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ VT (*) $\geq$ VP (*)

Dấu " = " $\Leftrightarrow t = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 0$

$\Rightarrow x = k\pi, k \in Z.$

Vậy nghiệm BPT đã cho là: $x = k\pi, k \in Z$.

Bài 11. Định m để: $(x + 1)(x + 3)(x^2 + 4x + 6) + m \geq 0, \forall x \in R.$

Giải

Ta có: $(x+1)(x+3)(x^2+4x+6) = (x^2+4x+3)(x^2+4x+6)$

$= (t-1)(t+2)$

(với $t = (x+2)^2 \geq 0$).

Do đó: $(x+1)(x+3)(x^2+4x+6) + m \geq 0, \forall x \in R$

$\Leftrightarrow f(x) = (t-1)(t+2) \geq -m, \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \min\limits_{t\geq 0} f(t) \geq -m.$

Hơn nữa: $f'(x) = t + 2 + t - 1 = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ f tăng dần $[0, +\infty)$

$\Rightarrow \min\limits_{t\geq 0} f(t) = f(0) = -2$

Vậy $-2 \geq -m \Leftrightarrow m \geq 2$ là kết quả cần tìm.

Bài 12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\cos x(\cos^2 y + 1) = (\cos y + 1)^2 \\ 2\cos y(\cos^2 z + 1) = (\cos z + 1)^2 \\ 2\cos z(\cos^2 x + 1) = (\cos x + 1)^2 \end{cases}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2002)

Giải

Xét $f(t) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $t \in [0,1]$

$$f'(t) = \frac{2(t^2+1) - 4t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2} > 0, \forall t \in [0, 1]$$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[0,1]$.

Do đó: Hệ $\begin{cases} 2\cos x - 1 = \dfrac{2\cos y}{\cos^2 y + 1} \\ 2\cos y - 1 = \dfrac{2\cos z}{\cos^2 z + 1} \\ 2\cos z - 1 = \dfrac{2\cos x}{\cos^2 x + 1} \end{cases}$ $(\cos x, \cos y, \cos z \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X - 1 = f(Y) \\ 2Y - 1 = f(Z) \quad (*) \\ 2Z - 1 = f(X) \end{cases}$$

(Với $X = \cos x$, $Y = \cos y$, $Z = \cos z \in [0, 1]$)

- Nếu $X \geq Y$ thì $f(Y) \geq f(Z)$

$\Rightarrow Y \geq Z$ (vì f tăng trên $[0,1]$)

$\Rightarrow f(Z) \geq f(X)$

$\Rightarrow Z \geq X$

$\Rightarrow X \geq Y \geq Z \geq X$

$\Rightarrow X = Y = Z.$

- Nếu $X \leq Y$, chứng minh tương tự ta cũng có:

$$X = Y = Z$$

Do đó: Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2X - 1 = f(X) \\ X = Y = Z \in [0,1] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2X - 1)(X^2 + 1) = 2X \\ X = Y = Z \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X^3 - X^2 - 1 = 0 \\ X = Y = Z \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (X - 2)(2X^2 + X + 1) = 0 \\ X = Y = Z \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos y = \cos z = 1$$

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = k2\pi \\ y = l2\pi \\ z = m2\pi \end{cases}$ $(k, l, m \in \mathbb{Z})$.

Bài 13. Xác định $a < 0$ để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y + a = y^2 \\ xy^2 + a = x^2 \end{cases}$$

Có nghiệm duy nhất.

Giải

(1) $\Leftrightarrow y^2 - x^2y = a < 0 \quad \Rightarrow 0 < y < x^2$

(2) $\Leftrightarrow x^2 - y^2x = a < 0 \quad \Rightarrow 0 < x < y^2$

Lấy (1) – (2) vế với vế, ta có:

$$xy(x - y)(xy + x + y) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ (vì $x, y \geq 0$)

Vậy hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + x^2 = a \\ x = y > 1 \end{cases}$

Xét $f(x) = -x^3 + x^2,\ x > 1.$

$f'(x) = -3x^2 + 2x = x(2 - 3x) < 0,\ \forall x > 1$

Bảng biến thiên:

x	1		+∞
f'(x)	|	−	
f(x)	0	↘	−∞

Nhìn trên bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = a < 0$ cắt đường cong $y = f(x)$ đúng một lần.

Vậy $a < 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị a để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \le a \\ x \ge 4, y \ge 0 \end{cases}$$

(ĐH Sư phạm Hà Nội, năm 2001)

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \ge 2 \\ v = \sqrt{y} \ge 0 \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ \sqrt{u^2+5} + \sqrt{v^2+3} \le a \\ u \ge 2, v \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v \\ 0 \le v \le 1 \\ f(v) = \sqrt{(3-v)^2+5} + \sqrt{v^2+3} \le a \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \underset{0 \le v \le 1}{\operatorname{Min}} f(v) \le a$

Mà $f'(v) = \dfrac{v-3}{\sqrt{(v-3)^2+5}} + \dfrac{v}{\sqrt{v^2+3}} < 0,\ \forall x \in [0,1]$

(vì $f'(v) < 0 \Leftrightarrow v\sqrt{(v-3)^2+5} < (3-v)\sqrt{v^2+3}$

$\Leftrightarrow v^2[(v-3)^2+5] < (3-v)^2(v^2+3)$

$\Leftrightarrow v^2(v-3)^2+5v^2 < v^2(3-v)^2+3(v+3)^2$

$\Leftrightarrow 5v^2 < 3(3-v)^2 = 3(v^2-6v+9)$

$\Leftrightarrow 2v^2+18v-27 < 0$

$\Leftrightarrow 2(v^2-1)+18(v-1)-7 < 0$

BĐT cuối đúng, $\forall x \in [0,1]$

Vậy $a \geq \underset{[0,1]}{\mathrm{Max}} f(v) = f(1) = 5$ là kết quả cần tìm.

C/ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Tìm GTNN của $f(x,y) = \dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{x^4} - 2\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, $x, y \neq 0$.

(Học viện Quân y, năm 2001)

Đáp số: $\underset{x,y\neq 0}{\mathrm{Min}} f(x,y) = -4$.

2. Tìm GTNN và GTLN của $y = \dfrac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$

(ĐH Sư phạm Hà Nội, năm 2001)

Đáp số: Maxy = 8/5, Miny = 4/3.

3. Cho $\begin{cases} x \geq 0 \\ \alpha \in Q, \alpha > 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x$.

b) Từ đó suy ra:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{2009}} + \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^{2009}} + \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^{2009}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \forall a, b, c > 0.$$

4. a) Không dùng bảng số loại máy tính cá nhân. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3} < \sin 20^0 < \frac{7}{20}$$

(ĐH Sư phạm Qui Nhơn, năm 2001)

b) Chứng minh rằng: $\sin \leq \dfrac{4}{\pi}x - \dfrac{4}{\pi^2}x^2, \forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ", năm 2003)

c) Cho $\begin{cases} a \geq b > 0 \\ a,\ b \in Q \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\left(2^a + \dfrac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \dfrac{1}{2^b}\right)^a$

(Đại học & Cao đẳng, Khối D, Năm 2007)

5. Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

(Đại học & Cao đẳng, khối B, năm 2004).

Đáp số: $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$.

6. a) Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} > 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}\,.$$

Đáp số: $1 < x \leq 4$

b) Tìm m để bất phương trình:

$mx - \sqrt{x-3} \leq m + 1$ có nghiệm.

Đáp số: $m \leq \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$.

7. Xác định m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 2008m \\ (x+1)^2 + y^2 = 2008m \end{cases}$$

Đáp số: $m = \dfrac{1}{4016}$.

8. Giải hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 + 4x + m^2 - m + 4 > 0 \\ \dfrac{1}{x^2} < 4 \end{cases}$$

(m là tham số cho trước)

Đáp số: $|x| > \dfrac{1}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG V

1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$

b) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Đáp số:

a) A. $5\cos x + 3\sin x$ B. $3\sin x - 5\cos x$

C. $5\cos x - 3\sin x$ D. Tất cả đều sai.

b) A. $\dfrac{-3}{(\sin x - \cos x)^2}$ B. $\dfrac{-4}{(\sin x - \cos x)^2}$

C. $\dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$ D. Một đáp số khác.

2. Cho $f(x) = \sqrt{x + 1}$ $(x > -1)$. Tính $f(3) + (x - 3)f'(3)$.

Đáp số:

A. $\dfrac{x - 5}{3}$ B. $\dfrac{x - 5}{4}$ C. $\dfrac{x + 5}{3}$ D. $\dfrac{x + 5}{4}$

3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số sau:

$y = \dfrac{8x + 1}{1 - x}$

Đáp số:

A. y tăng trên $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$

B. y tăng trên các khoảng $(-\infty, 0)$; $(0, +\infty)$

C. y giảm trên các khoảng $(-\infty, 2)$; $(2, +\infty)$

D. y giảm trên $(-\infty, 1)$ và y tăng trên $(1, +\infty)$.

4. Cho $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$; $x \in R$. Giải phương trình $y'' = 0$ trên R.

Đáp số:

A. $x \in \{-1, 1 \pm \sqrt{3}\}$ B. $x \in \{1, 2 \pm \sqrt{3}\}$

C. $x \in \{-1, -1 \pm \sqrt{3}\}$ D. $x \in \{1, -2 \pm \sqrt{3}\}$.

5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại M(1, 0).

Đáp số:

A. $y = -3x + 10$ B. $y = -3x + 3$

C. $y = -3x + 5$ D. Một đáp số khác.

6. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên $[-4, 4)$

b) $y = \sin x - x$ trên $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Đáp số:

a) A. $\begin{cases} \max\limits_{[-4,4]} y = 40 \\ \min\limits_{[-4,4]} y = -61 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \max\limits_{[-4,4]} y = 40 \\ \min\limits_{[-4,4]} y = 30 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \max\limits_{[-4,4]} y = 61 \\ \min\limits_{[-4,4]} y = -40 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \max\limits_{[-4,4]} y = 40 \\ \min\limits_{[-4,4]} y = 20 \end{cases}$

b) A. $\begin{cases} \max\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = \pi \\ \min\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = -\pi \end{cases}$ B. $\begin{cases} \max\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = 2\pi \\ \min\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = -2\pi \end{cases}$

C. $\begin{cases} \max\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = \frac{\pi}{4} \\ \min\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ D. $\begin{cases} \max\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = \frac{\pi}{2} \\ \min\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

7. Xác định m để hàm số: $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Đáp số:

A. $m = -1$ B. $m = -2$ C. $m = -3$ D. $m = -4$.

8. Tìm các điểm cực trị của hàm số: $f(x) = \sin^2 x$.

Đáp số:

A. $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ $(k \in Z)$ là các điểm cực đại của hàm số.

B. $x = k\pi$ $(k \in Z)$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

C. Cả A và B

D. Một đáp số khác.

9. Rút gọn biểu thức (theo $n \in N$):

$$S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (n+3)C_n^n$$

Đáp số:

A. $S = 3^{n-1}(n + 6)$ B. $S = 8^{n-1}(n + 3)$

B. $S = 2^{n-1}(n + 6)$ D. $S = 2^{n-1}(n + 3)$

10. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$, $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$. Giải BPT: $f'(x) \le 1$

Đáp số:

A. $x \le 5$ B. $x \ge 5$

C. $x = 5$ D. Tất cả đều sai.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
ÔN TẬP CHƯƠNG V

1. a) Chọn A. Ta có: $y = 5\sin x - 3\cos x$

$$y' = 5\cos x + 3\sin x$$

b) Chọn C. Ta có: $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

2. Chọn D. Ta có $f(x) = \sqrt{x+1}$ $(x > -1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow f(3) + (x - 3)\,f'(3) = 2 + (x - 3)\,.\,\frac{1}{4} = \frac{x+5}{4}$$

3. Chọn A. Ta có: $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$ $(x \ne 1)$

$$y' = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall\, x \ne 1$$

$\Rightarrow$ y tăng trên các khoảng $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$.

$$y' = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}$$

4. Chọn D.

$$y'' = \frac{(-2-2x)(x^2+1)^2 - (1-2x-x^2)4x(x^2+2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{(-2-2x)(x^2+1)^2 + 4x(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

Do đó: $y'' = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1, -2 \pm \sqrt{3}\}$

5. Chọn B.

$y = x^3 - 3x^2 + 2,\ x \in R$

$y' = 3x^2 - 6x$

$\Rightarrow y'(1) = -3.$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M(1, 0)

$y - 0 = -3(x-1)$

Hay $y = -3x + 3$.

6. a) Chọn A.

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35\ ;\ x \in [-4.4[$

$$y' = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	−4		−1		3		4
y'		+	0	−	0	+	
y	−61	↗	40	↘	8	↗	15

$$\text{Vậy}: \begin{cases} \max\limits_{[-4,4]} y = 40 \\ \min\limits_{[-4,4]} y = -61 \end{cases}$$

b) Chọn D.

$$y = \sin 2x - x \ ; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y' = 2\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \text{ (vì } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

Hơn nữa:
$$\begin{cases} y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \\ y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Vậy
$$\begin{cases} \max\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = \frac{\pi}{2} \\ \min\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} y = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

7. Chọn C.

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \quad (x \neq m)$$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$$

y đạt cực đại tại $x = 2$ nên $y'(2) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 + 4m + m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -3 \end{array}\right.$$

Thử lại:

• Với m = −1, ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Bảng biến thiên:

x	−∞		0		1		2		+∞
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	−∞	↗	CĐ	↘ −∞	‖	+∞ ↘	CT	↗	+∞

⇒ m = −1 không nhận (vì lúc này hàm số đạt cực tiểu tại x = 2).

• Với m = −3, ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$

Bảng biến thiên:

x	−∞		2		3		4		+∞
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	−∞	↗	CĐ	↘ −∞	‖	+∞ ↘	CT	↗	+∞

⇒ m = −3 nhận (vì lúc này hàm số đạt cực đại tại x = 2).

8. Chọn C. Ta có: $f(x) = \sin^2 x$, $x \in R$

$$f'(x) = \sin 2x \ (=0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in Z)$$

$$f''(x) = 2\cos 2x$$

Hơn nữa: $\begin{cases} f''(k\pi) = 2\cos 2k\pi = 2 > 0 \\ f''\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 2\cos(\pi + 2k\pi) = -2 < 0 \end{cases}$

Vậy • $x = k\pi$ $(k \in Z)$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

• $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ là các điểm cực đại của hàm số.

9. Chọn B. Với $x \in R$, ta có:

$$x^3(1 + x)^n = x^3(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)$$

$$\Leftrightarrow x^3(1 + x)^n = C_n^0 x^3 + C_n^1 x^4 + C_n^2 x^5 + \ldots + C_n^n x^{n+3}$$

Lấy đạo hàm hai vế (theo biến x), ta có:

$3x^2(1 + x)^n + nx^3(1 + x)^{n-1} = 3C_n^0 + 4C_n^1x^3 + 5C_n^2x^4 + \ldots + (n + 3)C_n^nx$

Lấy x = 1, ta có ngay:

$3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (n + 3)C_n^n = 3.2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(n + 6)$.

10. Chọn D.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$, $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} \le 1$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 8} \ge x - 1$

- Nếu $x < -2$ thì $\sqrt{x^2 - 2x - 8} > 0 > x - 1$
- Nếu $x > 4$ thì $\sqrt{x^2 - 2x - 8} \ge x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \ge x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow -8 \ge 1$ (vô lý).

Vậy $f'(x) \le 1 \Leftrightarrow x < -2$.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU 3

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 5

A/ Tóm tắt lý thuyết 5

B/ Biến đổi lượng giác 13

B1. Bài tập cơ bản 13

B2. Bài tập đề nghị 32

B3. Bài tập nâng cao 34

B4. Bài tập nâng cao đề nghị 44

C/ Phương trình lượng giác 45

C1. Bài tập cơ bản 45

C2. Bài tập căn bản đề nghị 64

C3. Bài tập nâng cao 66

C4. Bài tập nâng cao đề nghị 76

Bài tập trắc nghiệm ôn tập chương I 77

Lời giải bài tập trắc nghiệm ôn tập chương I 80

CHƯƠNG II. TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT 84

§1. Tổ hợp 84

A/ Tóm tắt lý thuyết 84

B/ Bài tập 88

C/ Bài tập đề nghị 104

§2. Xác suất 106

A/ Tóm tắt lý thuyết 106

B/ Bài tập 109

C/ Bài tập đề nghị 121

Bài tập trắc nghiệm ôn tập chương II 122
Lời giải bài tập trắc nghiệm ôn tập chương II 124
CHƯƠNG III. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN 127
§1. Phương pháp quy nạp toán học 127
A/ Tóm tắt lý thuyết 127
B/ Bài tập 127
C/ Bài tập đề nghị 131
§2. Dãy số 132
A/ Tóm tắt lý thuyết 132
B/ Bài tập 133
B1. Xác định dãy số 133
B2. Bài tập đề nghị 137
B3. Xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy số 139
B4. Bài tập đề nghị 144
§3. Cấp số cộng và cấp số nhân 145
A/ Tóm tắt lý thuyết 145
B/ Bài tập cơ bản 146
C/ Bài tập cơ bản đề nghị 151
D/ Bài tập nâng cao 153
E/ Bài tập nâng cao đề nghị 158
Bài tập trắc nghiệm ôn tập chương III 160
Lời giải bài tập trắc nghiệm ôn tập chương III 162
CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN 165
§1. Giới hạn của dãy số 165
A/ Tóm tắt lý thuyết 165
B/ Bài tập 167
C/ Bài tập đề nghị 183
§2. Giới hạn của hàm số 185

A/ Tóm tắt lý thuyết 185

B/ Bài tập (chủ yếu là các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$) 189

C/ Bài tập đề nghị 199

§3. Hàm số liên tục 201

A/ Tóm tắt lí thuyết 201

B/ Khảo sát tính liên tục 202

C/ Bài tập đề nghị 207

D/ Chứng minh phương trình có nghiệm 209

E/ Bài tập đề nghị 217

Bài tập trắc nghiệm ôn tập chương IV 218

Lời giải bài trắc nghiệm ôn tập chương IV 219

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG 223

§1. Định nghĩa đạo hàm và quy tắc tính đạo hàm 223

A/ Tóm tắt lý thuyết 223

B/ Bài tập 226

C/ Bài tập đề nghị 232

§2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm 234

A/ Tóm tắt lý thuyết 234

B/ Bài tập 234

C/ Bài tập đề nghị 238

§3. Ứng dụng định lý Lagrange 240

A/ Tóm tắt lý thuyết 240

B/ Bài tập 240

C/ Bài tập đề nghị 248

§4. Tính đơn điệu của hàm số 249

A/ Tóm tắt lý thuyết 249

B/ Bài tập 250

C/ Bài tập đề nghị 255

§5. Cực trị của hàm số 257
A/ Tóm tắt lý thuyết 257
B/ Bài tập 258
C/ Bài tập đề nghị 263
§6. Ứng dụng tính đơn điệu 265
A/ Tóm tắt lý thuyết 265
B/ Bài tập 266
C/ Bài tập đề nghị 278
Bài tập trắc nghiệm ôn tập chương V 280
Lời giải bài tập trắc nghiệm ôn tập chương V 282

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: THU HIÊN – TRẦN HƯNG

Chế bản: Nhà Sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

Thực hiện liên kết: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

CÁC CHỦ ĐỀ ĐẠI SỐ – GIẢI TÍCH 11

Mã số: 1L-183ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 58 - 2007/CXB/54 - 03/ĐHQGHN, ngày 22/01/2007.
Quyết định xuất bản số: 411 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.